云南大学丛书编辑委员会　主编

# 欧拉—泊松—达布方程

杨光俊　编著

云南教育出版社

云南大学丛书编辑委员会主编

# 欧拉—泊松—达布方程

杨光俊 著

云 南 教 育 出 版 社

封面设计：李泽衡

云南大学丛书编辑委员会主编

欧拉—泊松—达布方程

杨光俊 著

*

云南教育出版社出版

（昆明市书林街100号）

云南新华印刷厂印装

*

开本：850×1168 1/32 印张：15.75 字数：375,000

1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷

印数：1—2,200

ISBN 7-5415-0214-6/G·196 定价：5.95 元

# 出 版 说 明

这是云南大学丛书的一种。

云南大学建校六十余年，学科门类比较齐全，各门学科的专家比较集中，拥有众多的教师和研究生，具有良好的学术和信息交流环境，一些学科已在国内外形成了自己的特色。为提高教育质量和全民族的科学文化水平，促进国际学术交流，增强各门学科主动适应经济建设、社会发展需要的活力，为加速实现社会主义四个现代化服务，我们选编了这套丛书。

本丛书的选编分哲学社会科学和自然科学两类，既重视传统学科，又突出具有特色的新兴学科和边缘学科。

本丛书的性质为学术性专著，以反映我校基础理论研究和具有学术理论价值的应用研究和开发性研究的成果。

本丛书不定期出版，可供高等院校师生、科学和技术工作者、中等学校教师以及有关从事学术和科技工作的读者阅读。

鉴于编者水平的限制，本书的缺点、错误在所难免，请批评指正。

云南大学丛书编辑委员会

一九八六年四月七日

# 序

早期对超双曲方程的探索，稍后对混合型方程的研究都涉及到EPD方程．远在黎曼解 Laplace 双曲方程时创造黎曼方法，但对黎曼函数的存在性并未证明．达布用长函数法证明了这个存在性．这个证明归结为EPD方程解的存在性的证明，从而得到了所谓的泊松公式的证明．达布并认为这个方程是二阶线性方程的代表，它反映了这一大类方程解的许多性质．Le-Roux接着在他的博士论文中进一步深入探讨了这个方程，可惜后继者很少，并且重要的是没有能把探索的范围扩大到高维．

我国学者进一步认识这个方程事实上类似于常微分方程 Fuchs理论，从而提出要把常微分方程的Fuchs理论推广到偏微分方程．国内有许多青年学者在这方面做出了工作，这里先后就有王光寅、齐民友、杨光俊等同志．杨光俊同志把多年教学和科研的结果，系统地写了这本书，内容充实、文笔流畅，一定会对线性偏微分方程定性研究起很好的作用．这个理论也是我国学者首先提出的．中间也包括线性偏微分方程的Fuchs的理论．

Hadamard的基本理论事实上是以特征角面为奇性的Fuchs理论，可惜没有考虑到方程式系数的奇性与解的奇性的关系．那末究竟如何使基本解能够反映出系数的奇性与解的奇性的关系呢？我们认为似应从特征角面的奇性入手．邱佩璋、陈立诚、栾文贵的结果[128] 可以增强我们信心，这就是说这本书将大有发展余地．特此为序．

吴新谋

1985年8月于北京中国科学院数学研究所

# 目　录

# 引　言

考虑一类含奇线的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{a}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{b}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{c}{(\xi-\eta)^2}u=0. \qquad (0.1)$$

其中 $a$，$b$，$c$ 均为常数．它称为Euler-Poisson-Darboux方程，或简写为EPD方程．该方程最早于1790年由Euler[1]给出，尔后是Poisson[2]于1823年对其特殊情形进行过研究，1914年Darboux在他的名著《曲面论》一书[3]中对（0.1）作了系统的总结．并因此而以该三位数学家的名字命名（0.1）．其实，历史上研究过(0.1)的著名数学家并不仅只是他们三人，例如 Riemann[4]也研究了（0.1）的特殊情形，并导出了著名的 Riemann 法．Volterra[5]，Beltrami[6]等都对（0.1）作过研究工作．直到1958年，Weinstein[30, 47, 48, 62]，Erdélyi[29, 67]和Lions[31, 64, 66]等著名数学家都深入地研究过（0.1）的特殊情形．

令 $u(\xi,\ \eta)=(\xi-\eta)^{\alpha}U(\xi,\ \eta)$，代入（0.1），直接计算表明，若 $\alpha$ 是方程

$$\alpha^2+(a+b-1)\alpha+c=0, \qquad (0.2)$$

的两个根，则在上述变换下，（0.1）变为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{a+\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{b+\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial U}{\partial\eta}=0.$$

因此，不失一般性，只须讨论 $c=0$ 时的EPD方程．按照Euler的

记号，将其写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\quad(\beta,\ \beta'=\text{const.}).\tag{0.1)'$$

如果$\beta=\beta'$，则令$\xi=x+y$，$\eta=x-y$，得到

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

于是（0.1）′化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0.\tag{0.3}$$

这是一个双曲型方程．相应地，有一个椭圆型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0.\tag{0.4}$$

有人称（0.4）为Beltrami 方程，或广义轴对称位势方程．但我们仍称其为椭圆型EPD方程．

方程（0.3）和（0.4）在理论和实际中应用十分广泛，与经典方程的联系也较紧密．

**1.与波动方程和Laplace方程之间的联系**

如众所周知，波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0,\tag{0.5}$$

在柱坐标$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，$t=t$的变换下变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0. \tag{0.6}$$

求变量分离解 $u(r, t, \theta)=E(r, t)H(\theta)$，则$E$满足方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{\lambda^2}{r^2}E=0,$$

其中$\lambda$为比例常数．这正是（0.1）型的方程．对于 Laplace 方程也有类似结果．

如果我们要求波动方程（0.5）或三维 Laplace 方程的轴对称解，那就导致

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0, \tag{0.7}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0. \tag{0.8}$$

轴对称方程在数学物理中有许多应用．例如见I．N．Sneddon 的专著[7]和K．B．Ranger的几篇文章[8－11]．

此外，在空间波动方程的求解上，EPD方程也起着重要的作用．M．H．Martin[12，13]曾给出柱波方程的一种新解法（其后又推广到多维的情形，M．H．Protter[14]曾用于解决特征问题），以引入“伴随方程”的方法代替共轭方程，而其中“伴随方程”正是$\beta=\beta'=\frac{1}{2}$时的 EPD 方程，对应的基本解就是EPD方程的Riemann函数．其实，波动方程的基本解

$$\left[(t-t_0)^2-(x_1-x_1^0)^2-(x_2-x_2^0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

和Laplace方程的基本解

$$\left[(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

正是（0.7）和（0.8）的特解。

至于波动方程的解$u(x_1, x_2, x_3, t)$和空间EPD方程的解$v(x_1, x_2, x_3, t)$的关系，其中

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta v-\frac{2}{t}\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

导致解Cauchy问题的Poisson公式，更是人们所熟知的事实〔例如可参见F. John：偏微分方程，科学出版社（1986）〕

**2.与混合型方程的关系**

Tricomi方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在双曲域（$y<0$）和椭圆域（$y>0$）分别化为（0.3）和（0.4）的特殊情形$E\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$，即$\beta=\beta'=\frac{1}{6}$。对一般的混合型方程

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (m>0,\ y>0). \qquad (0.9)$$

在特征变换$\xi=x+\frac{2}{2+m}y^{\frac{2+m}{2}}$，$\eta=x-\frac{2}{2+m}y^{\frac{2+m}{2}}$之下，

化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{m}{2(2+m)}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{m}{2(2+m)}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

(0.10)

这也是EPD方程的特殊情形。

更一般地，还可考虑

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p y^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (p = \text{const.}), \qquad (0.11)$$

而得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\frac{m}{2} - p}{2+m} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\frac{m}{2} + p}{2+m} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad (0.12)$$

另一种混合型方程

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (m > 0,\ y > 0), \qquad (0.13)$$

在特征变换 $\xi = x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$，$\eta = x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$ 之下，可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{m}{2(2-m)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{m}{2(2-m)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \qquad (0.14)$$

因此，EPD方程在混合型方程中的作用如同双曲型方程中弦振动方程和椭圆型方程中的Laplace方程一样（参见Tricomi[15]和M. M. Смирнов[16]）. 直到现在，混合型方程的求解仍然是建立在EPD方程上. 正是对混合型方程的研究，近二、三十年来给出EPD 方程的许多结果. 对混合型方程的研究要有新的突破，也还有待于对EPD方程的进一步研究.

**3.与Fuchs型方程的关系**

EPD 方程的特点是它的系数有奇性，以 $\xi - \eta = 0$ 为奇线，而且未知函数的第 $n$ 阶微商前的系数的奇性为 $2-n$ 阶（$n=0$,

1，2），这点和Fuchs型常微分方程一致，对方程（0.1）也可仿Fuchs型方程引入“指数”概念。所谓“指数”是指：如果存在一个常数$\alpha$和一个正则函数$Z(\xi,\eta)\neq 0$，使得

$$u(\xi,\eta)=(\xi-\eta)^{\alpha}Z(\xi,\eta). \tag{0.15}$$

是（0.1）的解，则称$\alpha$是（0.1）的“指数”，$Z(\xi,\eta)$是解的正则部分。

可以证明：方程（0.1）有两个指数值，可完全由方程系数中的参数$a$，$b$，$c$所确定。

事实上，将（0.15）代入（0.1），得到

$$(\xi-\eta)^2\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\partial\eta}-(\xi-\eta)\left[(a+\alpha)\frac{\partial Z}{\partial\xi}-(b+\alpha)\frac{\partial Z}{\partial\eta}\right]$$

$$+[-\alpha(\alpha-1)-\alpha(a+b)-c]Z=0.$$

令$\xi\to\eta$，由$Z$的正则性和$Z(\xi,\xi)\neq 0$，立得

$$F(\alpha)=\alpha(\alpha-1)+\alpha(a+b)+c=0.$$

即

$$F(\alpha)=\alpha^2+\alpha(a+b-1)+c=0. \tag{0.16}$$

（0.16）就是“指数方程”，它至多有两个根$\alpha_1$，$\alpha_2$。

自然会产生这样的问题：二阶线性偏微分方程中，在$\xi=\eta$附近具有形如（0.15）的解$(\alpha\neq 0)$的方程，其最一般的形势是什么？方程（0.1）是否是一种标准形式？

其次，方程（0.1）和广义超几何方程类似，例如将EPD方程写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+P(D)u=0. \tag{0.17}$$

的形式，其中$P(D)=\pm\frac{\partial^2}{\partial x^2}$是微分算子，与下面的Bessel方

程

$$Z''(y)+\frac{2\beta}{y}Z'(y)+\lambda Z(y)=0\ (\lambda=\text{const}). \quad (0.18)$$

比较，(0.18) 的解为

$$Z(y)=\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{\lambda y^2}{4}\right)^m}{m!\,\Gamma(\beta+m+\frac{1}{2})}$$

$$=\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}y}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}y\right),$$

上列级数如将参数λ代以算子$P(D)$，则得 (0.17) 的一个算子级数解。因而，可将 (0.18) 的许多性质推广到 (0.17) 上去。

Fuchs 型方程有许多性质，如解的集合构成群，导致了自守函数理论。偏微分方程如何？这都是有待探讨的问题。

**4.与重特征方程的关系**

F. Treves 1974年[25]提出，方程

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}=0. \quad (0.19)$$

作为具有重特征方程的一个例，证明了 (0.19) 的零 Cauchy 问题 $u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0$，当 $p=1,\ 3,\ 5,\cdots$ 时有非零解，即解的唯一性有离散现象。王光寅[26]等也陆续证明了解的存在性，混合问题也有离散现象。

不难看出，方程 (0.19) 就是 (0.11) 当 $m=2$ 时的特别情形，即可化为 $\beta=\frac{1+p}{4}$，$\beta'=\frac{1-p}{4}$ 的EPD方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\frac{1-p}{4}}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\frac{1+p}{4}}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

通过对 EPD 方程的研究，可以帮助我们弄清楚重特征方程的某些奇怪现象。

**5.和Hens Lewy无解方程例的关系**

1957年，Hens Lewy提出如下方程

$$i\,(x_2+ix_3)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial x_3}=f'(x_1). \qquad (0.20)$$

证明了当 $f(x_1)$ 解析时，（0.20）无解。

上述问题的证明有多种方法。我们将问题化为与 EPD 方程有关的方程，从与EPD方程有关的理论去考虑它。

引入复变量 $z=x_2+ix_3$，$\overline{z}=x_2-ix_3$，则

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-i\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

于是（0.20）化为

$$iz\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}=f'(x_1).$$

令 $z=r^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$，则

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=r_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\theta_{x_2}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial x_3}=r_{x_3}\frac{\partial}{\partial r}+\theta_{x_3}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

其中 $r=x_2^2+x_3^2$，$\theta=tg^{-1}\dfrac{x_3}{x_2}$，$r_{x_2}=2x_2$，$r_{x_3}=2x_3$，

$$\theta_{x_2}=-\frac{x_3}{x_2^2+x_3^2},\quad \theta_{x_3}=\frac{x_2}{x_2^2+x_3^2}.$$ 从而

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=2x_2\frac{\partial}{\partial r}-\frac{x_3}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\quad \frac{\partial}{\partial x_3}=2x_3\frac{\partial}{\partial r}+\frac{x_2}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_3}\right)&=(x_2+ix_3)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{2r}(x_2+ix_3)\frac{\partial}{\partial \theta}\\&=z\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{2r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right).\end{aligned}$$

从而，原方程变为

$$r^{-\frac{1}{2}}e^{i\theta}\left(i\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{i}{2r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=f'(x_1). \tag{0.21}$$

为去掉方程中对 θ 的导数，令

$$\bar{u}(x_1,\ r)=i\int_0^{2\pi}e^{i\theta}u(x_1,\ x_2,\ x_3)d\theta, \tag{0.22}$$

将 (0.21) 对 θ 从 0 到 $2\pi$ 积分，得

$$r^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}-i\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{1}{2r}\int_0^{2\pi}ie^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta\right)=2\pi f'(x_1). \tag{0.23}$$

但是,

$$i\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}u\,d\theta=-i\bar{u},$$

从而得到

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}-i\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}-\frac{i}{2r}\bar{u}=2\pi r^{-\frac{1}{2}}f'(x_1). \tag{0.24}$$

(0.24) 是非齐次的EPD方程组．事实上，如让$\bar{u}=\bar{u}_1+i\bar{u}_2$，分离实部和虚部，上述齐次方程部分化为

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial r}+\frac{1}{2r}\bar{u}_2=0, \tag{0.25}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}-\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}-\frac{1}{2r}\bar{u}_1=0. \tag{0.26}$$

(0.25) 对 $r$ 求导得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r \partial x_1}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial r^2}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial r}-\frac{1}{2r^2}\bar{u}_2=0. \tag{0.27}$$

(0.26) 对 $x_1$ 求导得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r \partial x_1}-\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}=0.$$

以 (0.25) 代入得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1{}^2}-\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1 \partial r}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial r}+\frac{1}{4r^2}\bar{u}_2=0. \tag{0.28}$$

(0.27)+(0.28)，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial r}-\frac{1}{4r^2}\bar{u}_2=0.$$

类似地在 (0.25) 两边对 $x_1$ 求导，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1 \partial r}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1 \partial r}+\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}+\frac{1}{4r^2}\bar{u}_1=0. \tag{0.30}$$

(0.26) 对 $r$ 求导，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1 \partial r}-\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r^2}-\frac{1}{2r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}+\frac{1}{2r^2}\bar{u}_1=0. \tag{0.31}$$

(0.30)－(0.31)，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}-\frac{1}{4r^2}\bar{u}_1=0. \tag{0.32}$$

即实部与虚部都满足同样的椭圆型 EPD 方程，而且该方程的参数是特殊的。

为进一步化简，令$\bar{u}_1=r^\lambda \bar{v}_1$，则

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}=r^\lambda \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial r}+\lambda r^{\lambda-1}\bar{v}_1,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial r^2}=r^\lambda \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial r^2}+2\lambda r^{\lambda-1}\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial r}+\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}\bar{v}_1.$$

代入（0.32），得到

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1^2}+\frac{2\lambda+1}{r}\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial r}+\frac{\lambda(\lambda-1)+\lambda-\frac{1}{4}}{r^2}\bar{v}_1=0.$$

它的指数方程为$\lambda^2-\frac{1}{4}=0$，由此得$\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}$. 取$\lambda=-\frac{1}{2}$，则$\bar{v}_1$是Laplace方程

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial r^2}=0$$

的解。于是，如令

$$\overline{W}(x_1, r)=r^{\frac{1}{2}}\bar{u}(x_1, r)=ir^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}u(x_1, x_2, x_3)d\theta,$$

则应有

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial r}=\frac{1}{2}ir^{-\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}u\,d\theta+ir^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta. \tag{0.33}$$

(0.21) 对θ积分，得

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial x_1}+r^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta+\frac{i}{2r^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta=2\pi f'(x_1),$$

或者

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial x_1}+r^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta+\frac{1}{2r^{\frac{1}{2}}}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}u d\theta=2\pi f'(x_1),$$

即

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial x_1}-i\frac{\partial \overline{W}}{\partial r}=2\pi f'(x_1). \tag{0.34}$$

于是，

$$\overline{W}-2\pi f(x_1)=W(x_1, r)$$

满足

$$\frac{\partial W(x_1, r)}{\partial x_1}-i\frac{\partial W}{\partial r}=0.$$

这正是Cauchy-Riemann方程．因此，$W(x_1, r)$ 当 $r>0$ 时是 $x_1$，$r$ 的解析函数．如果 $u$ 是（0.20）在 $r=0$ 附近的正则解，或者是平方可积解（弱解），则由（0.22）得 $u$ 有界．那么，$\overline{W}(x_1, 0)=0$．从而 $\overline{W}(x_1, 0)-2\pi f(x_1)=-2\pi f(x_1)=W(x_1, 0)$ 应是 $x_1$ 的解析函数．故若 $f$ 是任意非解析函数，即使是无穷次可微函数，（0.20）都没有解存在．

以上就是稍加改动的Hens lewy对无解方程的论证．证明的关键是假定 $u$ 对θ的积分（0.22）有界．但是值得注意的是，我们已经指出（0.22）实际可以化为EPD方程组，而且其指数 $\lambda=\pm\frac{1}{2}$．根据Fuchs理论，（0.20）的齐次方程的通解应具有如下形式

$$u(x_1,r,\theta)=r^{\frac{1}{2}}u_1(x_1,r,\theta)+r^{-\frac{1}{2}}u_2(x_1,r,\theta). \qquad (0.35)$$

其中$u_1$，$u_2$在$r=0$附近是正则的．而（0.20）的解应是它的一个特解加上（0.35）．这样的解乘上$r^{\frac{1}{2}}$后，令$r\to 0$就不一定趋于零．故方程无解是指在一个特定的范围内．

注 1　关于（0.20）无解的证明，已有许多文章记述，特别证明了

**定理**　设$\mathscr{L}$表示作用于$u(x,y,z)$的算子（Lewy算子）

$$\mathscr{L}u=-u_x-iu_y+2i(x+iy)u_z, \qquad (0.36)$$

则存在一个函数$F(x,y,z)\in C^\infty(IR^3)$，使得方程

$$\mathscr{L}u=F(x,\ y,\ z). \qquad (0.37)$$

在一个开集$\Omega\subset \mathbb{R}^3$中无$C^1(\Omega)$类且$u_x$，$u_y$，$u_z$在$\Omega$中Hölder连续的解．

Treves证明了（0.37）连$\mathscr{D}'(\Omega)$类广义函数解也没有．

注 2　有趣的是，若设$z=x+iy$，$W=s+it$，超曲面$\pi$：$t=x^2+y^2$，$h=h(x,y,t,s)$是$z$和$W$的解析函数，且$h|_\pi$是$h$在超平面$\pi$上的迹，则映射$h|_\pi\to 0$的算子正是$\mathscr{L}$算子，即$\mathscr{L}(h|_\pi)=0$．这点易于证明，事实上

$$\mathscr{L}(h|_\pi)=\frac{\partial}{\partial z}(h|_\pi)-iz\frac{\partial}{\partial s}(h|_\pi)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}+2x\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\pi+\left(\frac{1}{2}i\frac{\partial h}{\partial y}+iy\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\pi-iz\frac{\partial h}{\partial s}\bigg|_\pi$$

$$=z\frac{\partial h}{\partial t}-iz\frac{\partial h}{\partial s}$$

$$=-iz\left(\frac{\partial h}{\partial s}+i\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

$$= -iz\frac{\partial h}{\partial W}$$

$$= 0.$$

众所周知，能求出解的明显表达式的偏微分方程不多。EPD方程能求出“通解”表达式，Riemann函数，基本解，Hadamard函数和Green 函数等，可以讨论一系列定解问题，以及许多性质（例如极值原理），内容之丰富，不亚于三个典型方程。就这一点来说，在二阶线性偏微分方程的研究中，EPD 方程也是值得特别重视的典型方程之一。

在偏微分方程的研究中，有所谓“启发性”原则。例如，调和函数的许多性质，可以推广到椭圆型方程的解。纵观 EPD 方程的研究结果，这种启发性原则的应用是很突出的。这种思想方法，概括起来大致可分为三个方面：根据波动方程和 Laplace 方程的结果，建立双曲型和椭圆型EPD方程的相应结果；根据双曲型EPD方程的结果，建立椭圆型EPD方程的结果；根据Bessel方程和超几何方程的有关结果，建立EPD方程的相应结果。抓住这一思路，对奇性方程进行探讨是很有益的。

# 第一章　双曲型EPD方程的古典结果

## §1. EPD方程的初步性质

**1. Laplace瀑布法**

考虑Laplace形式的双曲型方程

$$u_{\xi\eta}+A(\xi,\eta)u_{\xi}+B(\xi,\eta)u_{\eta}+C(\xi,\eta)u=0. \tag{1.1}$$

对未知函数 $u(\xi,\eta)$ 作乘子变换，令

$$u(\xi,\eta)=M(\xi,\eta)z(\xi,\eta), \tag{1.2}$$

有

$$u_{\xi}=Mz_{\xi}+M_{\xi}z,$$

$$u_{\eta}=Mz_{\eta}+M_{\eta}z,$$

$$u_{\xi\eta}=Mz_{\xi\eta}+M_{\eta}z_{\xi}+M_{\xi}z_{\eta}+M_{\xi\eta}z.$$

代入（1.1），得到

$$z_{\xi\eta}+A_1(\xi,\eta)z_{\xi}+B_1(\xi,\eta)z_{\eta}+C_1(\xi,\eta)z=0, \tag{1.3}$$

其中

$$\begin{cases} A_1=A+\dfrac{M_\eta}{M}, \\ B_1=B+\dfrac{M_\xi}{M}, \\ C_1=C+\dfrac{M_{\xi\eta}}{M}+A\dfrac{M_\xi}{M}+B\dfrac{M_\eta}{M}. \end{cases} \tag{1.4}$$

上式表明，两个不同系数的偏微分方程（1.1）和（1.3）可以通过（1.2）型的乘子变换彼此互变的充要条件是：存在一个函数 $M\in C^2$，使得（1.4）成立。或者，将（1.4）稍微变化一下，为

$$\begin{cases} A_1-A=(\ln M)_\xi, \\ B_1-B=(\ln M)_\eta, \\ C_1-C=A_1B_1-AB+(\ln M)_{\xi\eta}. \end{cases} \tag{1.4$'$}$$

换言之，系数间应有关系式

$$\frac{\partial\ (A_1-A)}{\partial\xi}=\frac{\partial(B_1-B)}{\partial\xi}=C_1-C-A_1B_1+AB. \tag{1.4$''$}$$

注意到（1.4）′，立即可见

$$(B_1-B)d\xi+(A_1-A)d\eta$$

是一个全微分，即为

$$(A_1-A)d\eta+(B_1-B)d\xi=d(\ln M).$$

故可取

$$M=\exp\{\int(B_1-B)d\xi+(A_1-A)d\eta\}.$$

找到了 $M$，由（1.2），问题即解决。

如果我们将（1.4）″分解为两个等式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial\xi}+A_1B_1-C_1=\dfrac{\partial A}{\partial\xi}+AB-C, \\ \dfrac{\partial B_1}{\partial\eta}+A_1B_1-C_1=\dfrac{\partial A}{\partial\eta}+AB-C, \end{cases} \tag{1.5}$$

由（1.5）出发，如令

$$\begin{cases} A_\xi+AB-C=h, \\ B_\eta+AB-C=k, \end{cases} \tag{1.6}$$

则上面的结果表明：两个 Laplace 形式的双曲型方程，彼此能通

过乘子变换（1.2）而互相得到的充要条件是两个方程的 $h$ 与 $k$ 相同。因此，$h$，$k$ 就称为方程（1.1）的不变量（在乘子变换下）。

不难证明，$h$，$k$ 在下列形式的自变量变换下是相对不变的（即 $h/k$ 不变）：

$\xi = f(x)$，$\eta = g(y)$。

事实上，这时

$$\frac{h}{k} = \frac{A_\xi + AB - C}{B_\eta + AB - C} = \frac{\dfrac{A_x}{f'(x)} + AB - C}{\dfrac{B_y}{g'(y)} + AB - C}$$

$$= \frac{g' A_x + ABf' g' - Cf' g'}{f' B_y + ABf' g' - Cf' g'}.$$

而上面最后一式正是（1.1）通过自变量变换（1.7）后的 $h_1/k_1$。

利用不变量化简方程，可将一阶微商项系数之一变为零（只须令 $A_1$ 或 $B_1$ 为零），但其主要应用还是在所谓的瀑布法上。

改写（1.1）为

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} + Au_\xi + Bu_\eta + Cu &= u_{\xi\eta} + Au_\xi + Bu_\eta + (A_\xi + AB - h)u \\ &= u_{\xi\eta} + (Au)_\xi + B(u_\eta + Au) - hu \\ &= (u_\eta + Au)_\xi + B(u_\eta + Au) - hu \\ &= 0. \end{aligned}$$

同样，有

$$u_{\xi\eta} + Au_\xi + Bu_\eta + Cu = (u_\xi + Bu)_\eta + A(u_\xi + Bu) - ku = 0.$$

令

$$\begin{cases} u_\eta + Au = u_1, \\ u_\xi + Bu = u_{-1}, \end{cases} \tag{1.8}$$

于是有

$$\begin{cases} u_{1\xi}+Bu_1-hu=0, \\ u_{-1\eta}+Au_{-1}-ku=0. \end{cases} \tag{1.9}$$

这个简单的变换表明：如果不变 $h$ 和 $k$ 之一等于零，则方程（1.1）可以求积．例如，当 $h=0$ 时，（1.9）的第一个方程变为

$$u_{1\xi}+Bu_1=0,$$

这是关于 $\xi$ 的一个常微分方程．令 $u_1=\phi(\eta)u_2(\xi)$，分离变量，可得到

$$u_1=\phi(\eta)\exp\{-\int B(\xi,\eta)d\xi\},$$

其中 $\phi(\eta)$ 是 $\eta$ 的任意函数．将 $u_1$ 代入（1.8），又得到关于 $u$ 的一个一阶线性非齐次常微分方程，从而最后可积出 $u$．如 $k=0$，也可类似处理．

如果 $h$ 和 $k$ 均不为零，通过（1.8）可将（1.1）变为一个新的方程．将（1.9）第一个方程对 $\eta$ 微分，得

$$\begin{aligned} 0 &= u_{1\xi\eta}+Bu_{1\eta}-h_\eta u+hu_\eta+B_\eta u_1 \\ &= u_{1\xi\eta}+Bu_{1\eta}+B_\eta u_1-h(u_1-Au)-h_\eta u, \end{aligned}$$

但（1.9）的第一式表明

$$u=u_{1\xi}+\frac{Bu_1}{h},$$

代入，从而有

$$\begin{aligned} 0 &= u_{1\xi\eta}+Bu_{1\eta}-hu_1+Au_{1\xi}+ABu_1-\frac{h_\eta}{h}u_{1\xi}-\frac{h_\eta Bu_1}{h}+B_\eta u_1 \\ &= u_{1\xi\eta}+Bu_{1\eta}+(B_\eta-h)u_1+\left(A-\frac{h_\eta}{h}\right)(u_{1\xi}+Bu_1) \end{aligned}$$

$$= u_{1\xi\eta} + \left(A - \frac{h_\eta}{h}\right)u_{1\xi} + Bu_{1\eta} + \left[\left(A - \frac{h_\eta}{h}\right)B\right.$$

$$\left. + (B_\eta - h)\right]u_1.$$

类似地，对（1.9）第二个方程进行变换，得到

$$0 = u_{-1\xi\eta} + Au_{-1\xi} + \left(B - \frac{k_\xi}{k}\right)u_{-1\eta} + \left[\left(B - \frac{k_\xi}{k}\right)A\right.$$

$$\left. + (A_\xi - k)\right]u_{-1}.$$

将这两个方程分别记为$(E_1)$和$(E_{-1})$，且写为一般形式

$$u_{1\xi\eta} + A_1 u_{1\xi} + B_1 u_{1\eta} + C_1 u_1 = 0, \tag{$E_1$}$$

$$u_{-1\xi\eta} + A_{-1}u_{-1\xi} + B_{-1}u_{-1\eta} + C_{-1}u_{-1} = 0. \tag{$E_{-1}$}$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = A - (\ln h)_\eta, \ B_1 = B, \ C_1 = A_1 B_1 + B_\eta - h, \\ A_{-1} = A, \ B_{-1} = B - (\ln k)_\xi, \ C_{-1} = A_{-1}B_{-1} + A_\xi - k. \end{cases} \tag{1.10}$$

由这些公式易推出$(E_1)$和$(E_{-1})$的不变量分别为

$$\begin{cases} h_1 = 2h - k - (\ln h)_{\xi\eta}, \ k_1 = h, \\ h_{-1} = k, \ k_{-1} = 2k - h - (\ln k)_{\xi\eta}. \end{cases} \tag{1.11}$$

如果$h \neq 0$，则由$(E_1)$解出$u_1$后，不须解任何微分方程，即可由下式得到

$$u = \frac{1}{h}(u_{1\xi} + Bu_1).$$

同样，如果$k \neq 0$，则由$u_{-1}$可立得

$$u = \frac{1}{k}(u_{-1\eta} + Au_{-1}).$$

由（1.1）出发，连续施行变换（1.8），可得两列方程

$$\begin{cases}(E_1),\ (E_2),\ (E_3),\ \cdots,\\(E_{-1}),\ (E_{-2}),\ (E_{-3}),\ \cdots.\end{cases}\tag{1.12}$$

对应的不变量记为

$$\begin{cases}h_1,\ h_2,\ h_3,\ \cdots,\\k_1,\ k_2,\ k_3,\ \cdots,\\h_{-1},\ h_{-2},\ h_{-3},\ \cdots,\\k_{-1},\ k_{-2},\ k_{-3},\ \cdots.\end{cases}\tag{1.13}$$

如令$h_0=h$，$k_0=k$，则由（1.11），有下列递推公式

$$\begin{cases}h_{n+1}=2h_n-h_{n-1}-(\ln h_n)_{\xi\eta},\\k_n=h_{n-1}\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).\end{cases}\tag{1.14}$$

当不变量$h_n$或$k_{-n}$中有一为零时，序列（1.12）到$(E_n)$或$(E_{-n})$即中止了，于是即可积出方程（1.1）.

## 2. EPD方程的某些可积情形

EPD方程可以作为应用Laplace瀑布法的一个很好的例子.考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{a}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{b}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{c}{(\xi-\eta)^2}u=0.\tag{0.1}$$

由（1.6），其不变量为

$$h=\frac{a(1-b)+c}{(\xi-\eta)^2},\qquad k=\frac{b(1-a)+c}{(\xi-\eta)^2}.$$

而对

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,\tag{0.1$'$}$$

其不变量为

$$\overline{h}=\frac{\beta'(1-\beta)}{(\xi-\eta)^2},\qquad \overline{k}=\frac{\beta(1-\beta')}{(\xi-\eta)^2}. \tag{1.15}$$

由前段结果知，若$\overline{h}=h$，$\overline{k}=k$，则（0.1）和（0.1）′可以互变．由此出发，我们得到：如果有$\beta'-a=\beta-b=\alpha$，$\alpha$待定，即

$$\beta'=a+\alpha,\qquad \beta=b+\alpha,$$

而$\alpha$又满足

$$\beta'(1-\beta)=a+\alpha-(a+\alpha)(b+\alpha)=a(1-b)$$
$$+\alpha(1-a-b)-\alpha^2=a(1-b)+c,$$

即

$$\alpha^2+\alpha(a+b-1)+c=0,$$

则$h=\overline{h}$（且$k=\overline{k}$），于是（0.1）和（0.1）′可以互变，而这正是(0.2) 式。

为方便计，今后我们采取下列记号

$$E(\beta,\beta')\equiv u_{\xi\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0,$$

其解记为$u(\xi,\eta;\beta,\beta')$或$u(\beta,\beta')$．由（1.5)看出，若将$\beta$换为$1-\beta'$，$\beta'$换为$1-\beta$，则$\overline{h}$，$\overline{k}$不变，即方程$E(\beta,\beta')$与$E(1-\beta',1-\beta)$有相同的不变量．由指数方程

$$\alpha^2-\alpha(1-\beta-\beta')=0$$

立得$\alpha_1=0$，$\alpha_2=1-\beta-\beta'$，即

$$u(\beta,\beta')=(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\ u(1-\beta',\ 1-\beta). \tag{1.16}$$

这样，我们就得到了EPD方程的第一类递推关系式．根据（1.14)

$$h_{n+1}=2h_n-h_{n-1}-(\ln h_n)_{\xi\eta}.$$

又$h_0=\dfrac{\beta'(1-\beta)}{(\xi-\eta)^2}$，不难计算$h_1=\dfrac{(1+\beta')(2-\beta)}{(\xi-\eta)^2}$. 由归纳法易于得到

$$h_n=\frac{A_n}{(\xi-\eta)^2},\qquad A_n=\text{const}.$$

为进一步得到$A_n$，我们注意

$$A_0=\beta'(1-\beta),\qquad A_{-1}=k_0=\beta(1-\beta').$$

而$(\ln h_n)_{\xi\eta}$与其分子的常数无关，它恒为$\dfrac{-2}{(\xi-\eta)^2}$，故由(1.14)，有

$$A_{n+1}=2A_n-A_{n+1}+2.$$

由$A_0$、$A_{-1}$的值，通过逐次迭代，得

$$A_n=(n+1)A_0-nA_{-1}+n(n+1)=\beta'(1-\beta)$$
$$+n[\beta'+(1-\beta)]+n^2=(n+\beta')(n+1-\beta).$$

可见，无论$n$为零或为整数，均有

$$h_n=\frac{(n+\beta')(n+1-\beta)}{(\xi-\eta)^2},\quad k_n=\frac{(n+\beta'-1)(n-\beta)}{(\xi-\eta)^2}.$$

由此看出，对$E(\beta,\beta')$而言，只有当$\beta$或$\beta'$为零或正、负整数时，序列(1.12)才会中断，即可积出. 故得

**命题** 方程$E(\beta,\beta')$可用瀑布法求解的充要条件是$\beta$、$\beta'$中有一个为零或正、负整数.

**例** Treves方程

$$Lu\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

变换为$E\left(\dfrac{1+p}{4},\ \dfrac{1-p}{4}\right)$，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\frac{1-p}{4}}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\frac{1+p}{4}}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

当 $p=1,5,9,\cdots,4n+1,\cdots$ 时，$\beta'=0,-1,-2,\cdots$。而当 $p=3,7,11,\cdots,4n-1,\cdots$ 时，$\beta=1,2,3,\cdots$。此时方程均可积出。

若 $p=1$，则方程为

$$u_{\xi\eta}+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-\eta}u_\eta=0.$$

令 $u_1=u_\eta$，则

$$u_{1\xi}+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-\eta}u_1=0.$$

因此，

$$u_1=u_\eta=\phi(\eta)(\xi-\eta)^{-\frac{1}{2}},$$

其中 $\phi(\eta)$ 为任意函数。于是

$$u=\int\phi(t)(\xi-t)^{-\frac{1}{2}}dt+\Psi(\xi),$$

其中 $\Psi(\xi)$ 为任意函数。

若 $p=3$，方程变为

$$u_{\xi\eta}+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{1}{\xi-\eta}u_\eta=0.$$

经恒等变形，为

$$\left(u_\eta+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-\eta}\right)_\xi+\frac{1}{\xi-\eta}\left(u_\eta+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-\eta}u\right)=0.$$

令 $u_1=u_\eta+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-\eta}$，得到

$$u_{1\xi}+\frac{1}{\xi-\eta}u_1=0.$$

于是

$$u_1=\phi(\eta)(\xi-\eta)^{-1},$$

$$u_\eta=\phi(\eta)(\xi-\eta)^{-1}-\frac{\frac{1}{2}}{\xi-\eta}u.$$

这是关于$\eta$的非齐次常微分方程．利用非齐次常微分方程的求解公式，若$y'+p(x)y=Q(x)$，则

$$y=e^{-\int p dx}\left(\int Qe^{\int p dx}dx+C\right).$$

于是

$$u(\xi,\eta)=(\xi-\eta)^{\frac{1}{2}}\int\phi(t)(\xi-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$+(\xi-\eta)^{\frac{1}{2}}\Psi(\xi).$$

其中$\phi$，$\Psi$是任意函数．

一般地，$p=5,7,9,\cdots$均可逐次积出．以后我们看到，若利用EPD解的递推公式求解，将更为方便．

## §2. 递推公式

EPD 方程的一个重要特性是不同参数所对应解之间有一定的递推关系．为揭示这一关系，我们将$E(\beta,\beta')$写为

$$(\xi-\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\beta'\frac{\partial u}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

两边对$\xi$求导，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(\xi-\eta)\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\partial\eta}-\beta'\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

稍加变型，有

$$(\xi-\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)-\beta'\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)$$

$$+(\beta+1)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0.$$

这表明：如$u(\beta,\ \beta')$是$E(\beta,\ \beta')$的解，则$\frac{\partial u(\beta,\beta')}{\partial\xi}$就是$E(\beta+1,\beta')$的解．换言之，有

$$u(\beta+1,\ \beta')=\frac{\partial u(\beta,\ \beta')}{\partial\xi}. \tag{1.16}$$

若在$E(\beta,\ \beta')$两边对$\eta$求导，可得

$$u(\beta,\ \beta'+1)=\frac{\partial u(\beta,\ \beta')}{\partial\eta}. \tag{1.17}$$

结合（1.16），（1.17），有

$$u(\beta+1,\ \beta'+1)=\frac{\partial^2 u(\beta,\ \beta')}{\partial\xi\partial\eta}.$$

一般地，有

$$u(\beta+m,\ \beta'+n)=\frac{\partial^{m+n}u(\beta,\beta')}{\partial\xi^m\partial\eta^n}\ （对一切整数\ m,\ \ n）. \tag{1.18}$$

(1.18)表明，对$E(\beta+m,\beta'+n)$而言，其解可由$E(\beta,\ \beta')$的解获得．于是，存在一个明显的问题：$E(\beta,\beta')$与$E(\beta+m,\ \beta'+n)$的解之间是否存在一种同构映射，即是否是一一对应的？即$E(\beta+m,\beta'+n)$的解，能否经过（1.18）而由$E(\beta,\ \beta')$的解而获得呢？

**命题** 若$\beta$，$\beta'$无一为零或正、负整数，则$E(\beta+m,\beta'+$

$n$)的解与$E(\beta,\ \beta')$的解之间有一一对应关系. 在其它情形，上述结论不真.

**证明** 先证后一情形. 若$\beta=0$，则不变量$k=\dfrac{\beta(1-\beta')}{(\xi-\eta)^2}=0$。于是由瀑布法可得

$$u(0,\ \beta')=\int\Psi(\xi)(\xi-\eta)^{-\beta'}d\xi+\phi(\eta)$$

是$E(0,\ \beta')$的解，$\phi$，$\Psi\in C^2$任意. 但此解对$\xi$微分后得

$$\frac{\partial u(0,\ \beta)}{\partial\xi}=\Phi(\xi),$$

$\phi$消失，这当然不能认为是$E(1,\ \beta')$的解. 实际上，由于

$$u(1,\beta')=(\xi-\eta)^{-\beta'}u(1-\beta',\ 0)$$

$$=(\xi-\eta)^{-\beta'}\int\phi(\eta)(\xi-\eta)^{\beta'-1}d\eta+(\xi-\eta)^{-\beta'}\Psi(\xi),$$

它不是$\Phi(\xi)$.

当$\beta$或$\beta'$为正负整数时，可类似讨论.

当$\beta$或$\beta'$无一为零或正、负整数时，由 (1.18)可从$E(\beta,\ \beta')$的解导出$E(\beta+m,\ \beta'+n)$的解. 反之，我们证明$E(\beta,\ \beta')$的解一定能由$E(\beta+1,\beta')$的解导出($\beta\neq0$) 即可. 类似可证$E(\beta,\ \beta')$的解可由$E(\beta,\ \beta'+1)$的解导出 ($\beta'\neq0$). 重复这些步骤，即可得所需结论.

设$E(\beta+1,\ \beta')$有解$u(\beta+1,\ \beta')$，我们以如下方式定义$u$为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=u(\beta+1,\ \beta'),\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\dfrac{\beta'}{\beta}u(\beta+1,\beta')-\dfrac{\xi-\eta}{\beta}\dfrac{\partial u(\beta+1,\ \beta')}{\partial\eta}.\end{cases}\quad(1.19)$$

这是可能做到的，因为当$u(\beta+1,\ \beta')$给定时，由上式确定$u$等于解一个方程。由于$u(\beta+1,\ \beta')$是$E(\beta+1,\ \beta')$的解，它满足方程

$$\frac{\partial u(\beta+1,\ \beta')}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\frac{\beta'}{\beta}u(\beta+1,\beta')-\frac{\xi-\eta}{\beta}\times\frac{\partial u(\beta+1,\ \beta')}{\partial\eta}\Big].\qquad(*)$$

如注意到（1.9）两式，第一式对$\eta$求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial u(\beta+1,\beta')}{\partial\eta}.$$

第二式对$\xi$求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\frac{\beta'}{\beta}u(\beta+1,\beta')-\frac{\xi-\eta}{\beta}\cdot\frac{\partial u(\beta+1,\beta')}{\partial\eta}\Big].$$

比较上式右端，也得(*)。故

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial u}{\partial\eta}d\eta\equiv u(\beta+1,\beta')d\xi+\Big[\frac{\beta'}{\beta}u(\beta+1,\beta')-\frac{\xi-\eta}{\beta}\cdot\frac{\partial u(\beta+1,\beta')}{\partial\eta}\Big]d\eta$$

是一全微分，即可由右边而积出$u$。而这$u$，一方面是$E(\beta,\ \beta')$的解；另一方面，对$\xi$微分后又是$E(\beta+1,\beta')$的解。

对于（1.19）第一式，上述第二点是显然的。剩下只须验证第一点。这也不难，事实上

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}$$
$$=\frac{\partial u(\beta+1,\beta')}{\partial\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}u(\beta+1,\ \beta')$$
$$+\frac{\beta}{\xi-\eta}\Big[\frac{\beta'}{\beta}u(\beta+1,\beta')$$

$$-\frac{\xi-\eta}{\beta}\cdot\frac{\partial u(\beta+1,\beta')}{\partial\eta}\Big]\equiv 0.$$

**推论** $E(\beta+m,\beta'+n)$的"通解"可由（1.18）求出的充要条件是$\beta$，$\beta+1$，…，$\beta+m-1$，$\beta'$，$\beta'+1$，…，$\beta'+n-1$无一为零。

公式（1.18）也可用来由$u(\beta,\ \beta')$积分而得$E(\beta-m,\ \beta'-n)$的解。但是，将（1.16）和（1.18）结合起来，同样可由微分$E(\beta,\ \beta')$的解而导出$E(\beta-m,\ \beta'-n)$的解。

事实上，在（1.18）中以$1-\beta'$代$\beta$，$1-\beta$代$\beta'$，把$n$，$m$互换，得到

$$\frac{\partial^{n+m}u(1-\beta',\ 1-\beta)}{\partial\xi^n\partial\eta^m}=u(1-\beta'+n,\ 1-\beta+m). \tag{1.18$'$}$$

再应用公式（1.16），即得

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial\xi^n\partial\eta^m}\left[\frac{u(\beta,\beta')}{(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}}\right]$$
$$=(\xi-\eta)^{\beta+\beta'-1-m-n}u(\beta-m,\ \beta'-n),$$

或者

$$(\xi-\eta)^{m+n+1-\beta-\beta'}\frac{\partial^{n+m}}{\partial\xi^n\partial\eta^m}\left[\frac{u(\beta,\ \beta')}{(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}}\right]$$
$$=u(\beta-m,\ \beta'-n). \tag{1.19$'$}$$

由（1.18）知，方程$E(\beta-m,\ \beta'-n)$的通解可由（1.19）$'$求出的充要条件是：$1-\beta$，$2-\beta$，…，$m-\beta$，$1-\beta'$，$2-\beta'$，…，$n-\beta'$无一为零，即

$$\prod_{k=1}^{m}(k-\beta)\prod_{j=1}^{n}(j-\beta')\neq 0.$$

这样一来，有了（1.18）和（1.19）′，就得到一个重要结果：对 $E(\beta,\ \beta')$ 而言，只须就 $0<\beta,\ \beta'<1$ 的情形求出其通解，然后由（1.18）和（1.19）′拓展至 $\beta\pm m,\ \beta'\pm n$ 的情形．而对 $\beta,\ \beta'$ 为零或正负整数时，用瀑布法可求出其通解．因此，我们对EPD方程的讨论，就限制在 $\beta,\ \beta'\in(0,\ 1)$ 内进行．

注　若 $\beta$ 等于某一正整数 $m$，则由（1.16）得

$$u(m,\ \beta')=\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}u(1,\ \beta').$$

而由 $u(1,\beta')=(\xi-\eta)^{-\beta'}u(1-\beta',\ 0)$ 可求出 $u(m,\ \beta')$．若 $\beta=-n$，则

$$u(\beta,\ -n)=(\xi-\eta)^{1+n-\beta}u(1+n,\ 1-\beta).$$

但 $u(1+n,\ 1-\beta)=\dfrac{\partial^n u(1,\ 1-\beta)}{\partial\xi^n}$，而 $u(1,1-\beta)$

$=(\xi-\eta)^{\beta-1}u(\beta,\ 0)$，故只须求 $u(\beta,\ 0)$ 即可．

## §3. 由特解求通解

我们试求 $E(\beta,\ \beta')$ 的变量分离解．令 $u=f(\xi)g(\eta)$，代入

$$E(\beta,\ \beta')u\equiv u_{\xi\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0\ (0<{\beta \atop \beta'}<1),$$

得到

$$f'(\xi)g'(\eta)-\frac{\beta'}{\xi-\eta}f'(\xi)g(\eta)+\frac{\beta}{\xi-\eta}f(\xi)g'(\eta)$$
$$=0.$$

同除以$f'(\xi)g'(\eta)$，有

$$(\xi-\eta)-\beta'\frac{g(\eta)}{g'(\eta)}+\beta\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}=0,$$

即

$$\xi+\beta\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\eta+\beta'\frac{g(\eta)}{g'(\eta)}=t\qquad(t=\text{const.}).$$

于是，得到

$$\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\beta^{-1}(t-\xi),\quad \frac{g(\eta)}{g'(\eta)}=\beta'^{-1}(t-\eta).$$

从而

$$f(\xi)g(\eta)=(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'},$$

即

$$u=(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}$$

是方程的一个特解．将其乘上任意函数$\phi(t)\in C^1$，进行连续迭加，得

$$\int_A^B\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}dt\qquad(A,\ B=\text{const.}).$$

显然，这仍是$E(\beta,\beta')$的解．事实上，有

$$E(\beta,\beta')\int_A^B\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}dt$$

$$=\int_A^B E(\beta,\beta')[(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}]\phi(t)dt=0.$$

进一步，我们可以证明，当$A$，$B$取特征变数$\xi$，$\eta$时，上式积分仍然是$E(\beta,\beta')$的解．

设　$A<\eta<B<\xi$，则

$$\int_A^B\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}dt=\int_A^\eta\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}dt$$

$$+\int_\eta^B\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}dt.$$

由于

$$(\eta-t)^{-\beta'}=(-1)^{-\beta'}(t-\eta)^{-\beta'}=(e^{i\pi})^{-\beta'}(t-\eta)^{-\beta'}$$
$$=(\cos\beta'\pi-i\sin\beta'\pi)(t-\eta)^{-\beta'},$$

上式右端变为

$$\int_A^\eta\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}dt+\cos\beta'\pi$$
$$\times\int_\eta^B\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt-i\sin\beta'\pi$$
$$\times\int_\eta^B\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt.$$

由于$E(\beta,\beta')$是实系数方程，故解为实函数，即上式解的实部和虚部均是解。而$0<\beta'<1$，因此

$$\int_\eta^B\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt. \tag{1.20}$$

也是$E(\beta,\beta')$的解．类似地，再取常数$B'$，使$\eta<B<\xi<B'$．于是

$$\int_B^{B'}\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt$$

也是解．由方程的线性性，它与（1.20）相加后也是解，即

$$\int_\eta^{B'}\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt$$

是解．但

$$\int_\eta^{B'}\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt$$
$$=\left(\int_\eta^\xi+\int_\xi^{B'}\right)\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt,$$

右边后一式中，

$$(\xi-t)^{-\beta}=(-1)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}=e^{-i\pi\beta}(t-\xi)^{-\beta},$$

由$0<\beta<1$，再利用实部和虚部的关系，得到

$$\int_{\xi}^{B'} \phi(t)(\xi - t)^{-\beta}(t - \eta)^{-\beta'} dt$$

也是$E(\beta, \beta')$的解．从而上式右边第一项也是解．这就表明．

$$\int_{\eta}^{\xi} \phi(t)(\xi - t)^{-\beta}(t - \eta)^{-\beta'} dt. \tag{1.21}$$

是$E(\beta, \beta')$的解．

注意到（1.21）仅含一个任意函数，不能认为是“通解”．但我们利用

$$u(\beta, \beta') = (\xi - \eta)^{1-\beta-\beta'} u(1-\beta', 1-\beta),$$

又得到另一通解

$$(\xi - \eta)^{1-\beta-\beta'} \int_{\eta}^{\xi} \psi(t)(\xi - t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1} dt$$
$$(\beta + \beta' \neq 1). \tag{1.21$'$}$$

从而就求得通解

$$u(\beta, \beta') = \int_{\eta}^{\xi} \phi(t)(\xi - t)^{-\beta}(t - \eta)^{-\beta'} dt + (\xi - \eta)^{1-\beta-\beta'} \times \int_{\eta}^{\xi} \psi(t)(\xi - t)^{\beta'-1}(t - \eta)^{\beta-1} dt. \tag{1.22}$$

（1.22）称为EPD方程的Poisson 形式解（Poisson首先在$\beta = \beta'$的情形得到，Appell推广到一般情形）．以后我们将会看到，还有其它形式的解的表达式．关于不同形式解之间的联系，还要专门论及．

注意到当$\beta + \beta' = 1$时，（1.22）右边第二式与第一式相同，这时需求另一含任意函数的解代替（1.21）′，Darboux解决了这一问题．

先让$1 - \beta - \beta' = \varepsilon \neq 0$，将（1.21）中的$\phi$改为$\psi$，然后与（1.21）′相减，且除以$\varepsilon$，得到

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[(\xi-\eta)^{\varepsilon}\int_{\eta}^{\xi}\psi(t)(\xi-t)^{-\beta-\varepsilon}(t-\eta)^{\beta-1}dt\right.$$

$$\left.-\int_{\eta}^{\xi}\psi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{\varepsilon+\beta-1}dt\right]=I_{\varepsilon}.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 取极限，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\eta}^{\xi}\psi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{\beta-1}$$

$$\times\left[\frac{(\xi-\eta)^{\varepsilon}(\xi-t)^{-\varepsilon}-(t-\eta)^{\varepsilon}}{\varepsilon}\right]dt$$

$$=\int_{\eta}^{\xi}\psi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{\beta-1}[\ln(\xi-\eta)$$

$$-\ln(\xi-t)(t-\eta)]dt,$$

其中我们用了洛比塔法则. 故$E(\beta,\ \beta')$的解为

$$u(\beta,\ \beta')=\int_{\eta}^{\xi}\phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{\beta-1}dt$$

$$+\int_{\eta}^{\xi}\psi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{\beta-1}\ln\frac{\xi-\eta}{(\xi-t)(t-\eta)}dt.$$

下面，直接验证 (1.22) 当 $\phi$，$\psi\in C^2$ 时是解. 对 (1.22) 进行变量变换，令 $t=\xi(1-\tau)+\eta\tau$，由 (1.22) 得到

$$u(\beta,\beta')=\int_{0}^{1}\psi[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'-1}d\tau$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{0}^{1}\phi[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{-\beta'}\tau^{-\beta}d\tau.$$

我们验证右边第一式，第二式利用 (1.16) 即得. 将

$$\int_{0}^{1}\psi[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'-1}d\tau. \qquad (1.23)$$

代入$E(\beta,\beta')$，经过计算得

$$\int_0^1\{\psi''[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}\psi'[\xi(1-\tau)$$

$$+\eta\tau](1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'-1}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\psi[\xi(1-\tau)$$

$$+\eta\tau](1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'}\}d\tau$$

$$=\frac{-1}{\xi-\eta}\int_0^1[\beta'\psi'(1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'-1}-(\xi-\eta)\psi''(1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'}$$

$$-\beta\psi'(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'}]d\tau$$

$$=\frac{1}{\xi-\eta}\int_0^1\frac{\partial}{\partial\tau}\{\psi'(1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'}\}d\tau$$

$$=\frac{-1}{\xi-\eta}\psi'[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'}\Big|_0^1$$

$$=0.$$

注 1　如果$\beta=\beta'$，(1.22) 还可表为其它形式．令$\xi=x+y$，$\eta=x-y$，方程$E(\beta,\beta')$变为

$$u_{xx}-u_{yy}-\frac{2\beta}{y}u_y=0,$$

(1.23) 变为

$$\int_0^1\psi[x+(1-2\tau)y]\tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau.$$

再令$1-2\tau=t$，以$\tau$代$t$，得

$$\int_0^1\psi[x+(1-2\tau)y]\tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau$$

$$=2^{1-2\beta}\int_{-1}^1\psi(x+\tau y)(1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau$$

$$=2^{1-2\beta}\int_0^1[\psi(x+\tau y)+\psi(x-\tau y)](1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau.$$

记$\Psi(x+\tau y)=2^{1-2\beta}[\psi(x+\tau y)+\psi(x-\tau y)]$，上式变为

$$\int_0^1\Psi(x+\tau y)(1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau. \tag{1.24}$$

另一解为

$$y^{1-2\beta}\int_0^1\phi(x+\tau y)(1-\tau^2)^{-\beta}d\tau, \tag{1.25}$$

其中$\phi$，$\Psi$是$\tau y$的偶函数。

(1.24)，(1.25)还有其它常见形式

$$\int_0^1\Psi(x+\tau y)(1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau$$

$$=y^{1-2\beta}\int_0^y\Psi(x+t)(y^2-t^2)^{\beta-1}dt$$

$$=\int_0^\pi\Psi(x+y\cos\theta)\sin^{1-2\beta}\theta d\theta. \tag{1.24$'$}$$

类似有

$$y^{1-2\beta}\int_0^1\phi(x+\tau y)(1-\tau^2)^{-\beta}d\tau=\int_0^y\phi(x+t)(y^2-t^2)^{-\beta}dt$$

$$=y^{1-2\beta}\int_0^\pi\phi(x+y\cos\theta)\sin^{1-2\beta}\theta d\theta. \tag{1.25$'$}$$

注 2　对三维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,$$

在柱坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$之下，变为

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0.$$

它有分离变量解．令 $u = Z(z)R(r)\Theta(\theta)$．特别，若 $u$ 是轴对称的，即与 $\theta$ 无关，则 $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$．方程变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

它称为轴对称波动方程．经分离变量有

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \xi^2 R = 0,$$

$$Z'' + \xi^2 Z = 0.$$

令 $r_1 = r\xi$，第一式变为

$$R'' + \frac{1}{r_1}R' + R = 0.$$

这是Bessel方程，其解为 $R = J_0(\xi r)$．而第二式为

$$Z = c_1(\xi)\cos\xi z + c_2(\xi)\sin\xi z.$$

$\xi$ 是分离变量，对 $\xi$ 进行连续迭加，得到

$$u = \int_0^\infty J_0(\xi r)[c_1(\xi)\cos\xi z + c_2(\xi)\sin\xi z]d\xi.$$

令 $c_1$，$c_2$ 为

$$\begin{cases} c_1(\xi) = \int_A^B \phi(t)\cos\xi t dt, \\ c_2(\xi) = \int_A^B \phi(t)\sin\xi t dt. \end{cases}$$

于是

$$u(r, z) = \int_A^B \phi(t)dt \int_0^\infty J_0(\xi r)[\cos\xi t\cos\xi z + \sin\xi t\sin\xi z]d\xi$$

$$=\int_A^B \phi(t)dt\int_0^\infty J_0(\xi r)\cos\xi(t-z)d\xi$$

$$=\int_A^B \frac{\phi(t)dt}{[r^2-(t-z)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

取 $A=z-r$，$B=z+r$，再令 $t=z+r\tau$，上式为

$$\int_{z-r}^{z+r}\frac{\phi(t)dt}{[r^2-(t-z)^2]^{\frac{1}{2}}}=\int_{-1}^{1}\phi(z+r\tau)(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}}d\tau,$$

这正是（1.24）的特款$\left(\beta=\frac{1}{2}\right)$.

注 3　若 $\beta$ 为一正整数，则

$$u(\beta,\ \beta')=\frac{\partial^{\beta-1}}{\partial\xi^{\beta-1}}[(\xi-\eta)^{-\beta'}u(1-\beta',\ 0)].$$

而方程

$$u_{\xi\eta}+\frac{1-\beta'}{\xi-\eta}u_\eta=0$$

的解为

$$u=\int\phi(\eta)(\xi-\eta)^{\beta'-1}d\eta+\psi(\xi),$$

特取 $\phi=0$，得一特解

$$u=\frac{\partial^{\beta-1}}{\partial\xi^{\beta-1}}[(\xi-\eta)^{-\beta'}\psi(\xi)].$$

若 $\psi$ 是 $\xi$ 的解析函数，则由Cauchy积分公式得

$$\frac{\partial^{\beta-1}}{\partial\xi^{\beta-1}}[(\xi-\eta)^{-\beta'}\psi(\xi)]=\frac{(\beta-1)!}{2\pi i}\int_c\frac{\psi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\eta)^{\beta'}(\zeta-\xi)^{\beta}}.$$

假定 $\psi(\zeta)$ 在 $|\zeta|<R$ 内解析，而 $\xi$，$\eta$ 是圆内两点. 如 $\beta$，$\beta'$ 不是整数时，这个积分不是单值的. $\xi$ 和 $\eta$ 是它的奇点.

当 $\xi$ 和 $\eta$ 位于实轴上，且 $\xi>\eta$ 时，取路径 $c$ 如图 1，其中环

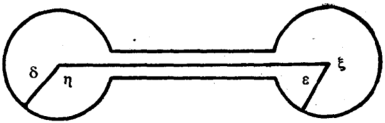


图 1

绕点$\xi$的小圆半径为$\varepsilon$，环绕点$\eta$的小圆半径为$\delta$。如$\beta<1$，$\beta'<1$，当$\varepsilon$，$\delta\to0$时，环绕小圆的积分趋于零，而得到

$$\int_\sigma=\int_\eta^\xi\psi(\zeta)(-1)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\eta)^{-\beta'}d\zeta$$

$$+\int_\xi^\eta\psi(\zeta)(-1)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\eta)^{-\beta'}d\zeta.$$

沿上沿的辐角为$\pi$，沿下沿为$-\pi$，而$(e^{\pi i})^\beta=\cos\beta\pi+i\sin\beta\pi$，故有

$$\int_\sigma=\int_\eta^\xi\psi(\zeta)(\xi-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\eta)^{-\beta'}(2i\sin\beta\pi)d\zeta$$

$$=2i\sin\beta\pi\int_\eta^\xi\psi(\zeta)(\xi-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\eta)^{-\beta'}d\zeta.$$

若不考虑常数因子，这就是（1.21）。同样可导出（1.21）′。

## §4. 例

为进一步掌握由特解求通解的方法，我们考虑$E(\beta,\beta')$的一个推广：

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}-b^2u=0\quad(b=\text{const},\quad 0<\beta<1).\tag{1.26}$$

注意到在$(x, y)$之下，$E(\beta, \beta')$的特解为

$$(x+y-t)^{-\beta}(t-x+y)^{-\beta}=[y^2-(x-t)^2]^{-\beta}.$$

不妨令$r^2=y^2-(x-t)^2$，则

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{(x-t)^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{r^2+(x-t)^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{r^2-y^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}.$$

代入（1.26），我们试图求$u=\Phi(r)$形特解。有

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-b^2\Phi$$

$$=\frac{(x-t)^2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\frac{r^2+(x-t)^2}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$$

$$-\frac{r^2-y^2}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{2\beta}{y}\frac{y}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-b^2\Phi$$

$$=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\frac{2\beta+1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-b^2\Phi.$$

这是变形的Bessel方程（其指数方程为$\rho(\rho+2\beta)=0$，指数$\rho_1=0$，$\rho_2=-2\beta$），有两个线性无关解

$$\overline{J}_\beta(br),\qquad r^{-2\beta}\overline{J}_{-\beta}(br),$$

其中

$$\overline{J}_\beta(\rho)=\Gamma(1+\beta)\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\beta}J_\beta(\rho). \tag{1.28}$$

我们取第二特解$r^{-2\beta}\overline{J}_{-\beta}(br)$。

另外，不难验证，对 (1.26) 有类似于$E(\beta,\beta')$的性质

$$u(x,\ y,\ \beta)=y^{1-2\beta}u(x,\ y,\ 1-\beta). \qquad (1.29)$$

这样可得 (1.26) 的两个特解

$$r^{-2\beta}\overline{J}_{-\beta}(br), \qquad y^{1-2\beta}r^{2\beta-2}\overline{J}_{\beta-1}(br). \qquad (1.30)$$

将这两个特解分别乘上任意函数$\psi(x')$，$\phi(x')$，再对$x'$连续迭加，得

$$u_1(x,\ y)=\int_{x-y}^{x+y}\frac{\psi(x')}{r^{2\beta}}\overline{J}_{-\beta}(br)dx', \qquad (1.31)$$

$$u_2(x,\ y)=y^{1-2\beta}\int_{x-y}^{x+y}\frac{\phi(x')}{r^{2-2\beta}}\overline{J}_{\beta-1}(br)dx'. \qquad (1.32)$$

(1.31)+(1.32) 可认为是 (1.26)的通解. 为了和$E(\beta,\beta')$的解Poisson表达式作比较，作变数代换$x'=x+y(1-2\tau)$，从而有

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\int_0^1\phi[x+y(1-2\tau)][\tau(1-\tau)]^{\beta-1}\\&\times\overline{J}_{\beta-1}[2by\sqrt{\tau(1-\tau)}]d\tau\\&+y^{1-2\beta}\int_0^1\psi[x+y(1-2\tau)][\tau(1-\tau)]^{-\beta}\\&\times\overline{J}_{-\beta}[2by\sqrt{\tau(1-\tau)}]d\tau. \qquad (1.33)\end{aligned}$$

如果$\phi$，$\psi\in C^2$，易证 (1.33) 是 (1.26) 的解. 由 (1.29)，只须验证$u_2(x,\ y)$是解. 记$\rho=2by\sqrt{\tau(1-\tau)}$，$T=\tau(1-\tau)$，则

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\int_0^1\phi'[x+y(1-2\tau)]T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\int_0^1 \phi''[x+y(1-2\tau)]T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}=\int_0^1 (1-2\tau)\phi'[x+y(1-2\tau)]T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$+2b\int_0^1 \phi T^{\beta-\frac{1}{2}}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=\int_0^1 (1-2\tau)^2\phi'' T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$+4b\int_0^1 \phi'(1-2\tau)T^{\beta-\frac{1}{2}}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}d\tau$$

$$+4b^2\int_0^1 \phi T^{\beta}\frac{d^2\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho^2}d\tau.$$

注意到

$$\int_0^1 \phi'' T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau-\int_0^1 (1-2\tau)^2\phi'' T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$=4\int_0^1 \phi''\tau(1-\tau)T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$=4\int_0^1 \phi'' T^{\beta}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$=-\frac{2}{y}\int_0^1 \frac{d}{d\tau}[\phi' T^{\beta}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)]d\tau$$

$$+\frac{2\beta}{y}\int_0^1 \phi' T^{\beta-1}(1-2\tau)\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$+2b\int_0^1 \phi' T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}d\tau.$$

上式已利用如下等式

$$\frac{2}{y}\frac{d}{d\tau}[\phi' T^{\beta}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)]$$

$$=\frac{2}{y}\phi''(-2y)T^{\beta}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)+\frac{2}{y}\phi'\beta T^{\beta-1}(1-2\tau)\overline{J}_{\beta-1}(\rho)$$

$$-\frac{2}{y}\phi'\beta T^{\beta-1}\tau\overline{J}_{\beta-1}(\rho)$$

$$+\frac{2}{y}\phi' T^{\beta}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}2by\frac{1-2\tau}{2T^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-4\phi'' T^{\beta}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)+\frac{2\beta}{y}\phi' T^{\beta-1}(1-2\tau)$$

$$\overline{J}_{\beta-1}(\rho)+2b\phi' T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}.$$

于是

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}$$

$$=-2b\int_0^1\phi' T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\tau}d\tau$$

$$+\frac{2\beta}{y}\int_0^1\phi' T^{\beta-1}(1-2\tau)\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$-4b^2\int_0^1\phi T^{\beta}\frac{d^2\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho^2}d\tau$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

对$I_1$，从如下恒等式出发

$$\frac{b}{y}\frac{d}{d\tau}\left\{\phi T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\bar{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}\right\}$$

$$=\frac{b}{y}\phi'(-2y)T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\bar{J}_{\beta-1}}{d\rho}$$

$$+\frac{b}{y}\phi\left(\beta-\frac{1}{2}\right)T^{\beta-\frac{3}{2}}(1-2\tau)^2\frac{d\bar{J}_{\beta-1}}{d\rho}$$

$$+\frac{b}{y}\phi T^{\beta-\frac{1}{2}}(-2)\frac{d\bar{J}_{\beta-1}}{d\rho}$$

$$+\frac{b}{y}\phi T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)^2\frac{2by}{2T^{\frac{1}{2}}}\frac{d^2\bar{J}_{\beta-1}}{d\rho},$$

由此得到

$$I_1=-2b\int_0^1\phi' T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\bar{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}d\tau$$

$$=\frac{b}{y}\int_0^1\frac{d}{d\tau}\left\{\phi T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\frac{d\bar{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}\right\}d\tau$$

$$-b^2\int_0^1\phi T^{\beta-1}(1-2\tau)^2\frac{d^2\bar{J}_{\beta-1}}{d\rho^2}d\tau$$

$$-\frac{b}{y}\int_0^1\phi\left\{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)T^{\beta-\frac{3}{2}}(1-2\tau)^2\right.$$

$$\left.-2T^{\beta-\frac{1}{2}}\right\}\frac{d\bar{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}d\tau.$$

右边第一式虽已积出，但$\beta-\dfrac{1}{2}$不一定为正数，尚须用公式

$$\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}=-\frac{\rho}{2\beta}\overline{J}_{\beta}(\rho). \qquad (*)$$

从而，有

$$I_1=\frac{b}{y}\left(-\frac{2by}{2\beta}T^{-\frac{1}{2}}\right)\phi T^{\beta-\frac{1}{2}}(1-2\tau)\overline{J}_{\beta}(\rho)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=1}$$

$$-b^2\int_0^1\phi T^{\beta-1}\frac{d^2\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho^2}d\tau$$

$$+4b^2\int_0^1\phi T^{\beta}\frac{d^2\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho^2}d\tau$$

$$+\frac{4b\beta}{y}\int_0^1\phi T^{\beta-\frac{1}{2}}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}d\tau$$

$$-(2\beta-1)b^2\int_0^1\phi T^{\beta-1}\rho^{-1}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}d\tau.$$

但是，$\overline{J}_{\beta-1}(\rho)$满足方程

$$\frac{d^2\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho^2}+\frac{2\beta-1}{\rho}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho}+\overline{J}_{\beta-1}(\rho)=0.$$

故有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-b^2\int_0^1\phi T^{\beta-1}\left(\frac{d^2\overline{J}_{\beta-1}}{d\rho^2}+\frac{2\beta-1}{\rho}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}}{d\rho}\right)d\tau$$

$$+\frac{4b\beta}{y}\int_0^1\phi T^{\beta-\frac{1}{2}}\frac{d\overline{J}_{\beta-1}}{d\rho}d\tau$$

$$+\frac{2\beta}{y}\int_0^1\phi' T^{\beta-1}(1-2\tau)\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau$$

$$= b^2\int_0^1 \phi T^{\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\rho)d\tau + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$= b^2 u_2 + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

剩下的仅需证(*)。事实上

$$\frac{d\overline{J}_{\beta-1}(\rho)}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}[\Gamma(\beta)2^{\beta-1}\rho^{-(\beta-2)}J_{\beta-1}(\rho)]$$

$$= \Gamma(\beta)2^{\beta-1}\frac{d}{d\rho}[\rho^{-(\beta-2)}J_{\beta-1}(\rho)]$$

$$= -\Gamma(\beta)2^{\beta-1}\rho^{-\beta+1}J_\beta(\rho)$$

$$= -\Gamma(\beta)\frac{\rho}{2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\beta}J_\beta(\rho)$$

$$= -\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)}\frac{\rho}{2}\overline{J}_\beta(\rho)$$

$$= -\frac{\rho}{2\beta}\overline{J}_\beta(\rho).$$

## §5. Riemann函数

### 1.变换群

如象Fuchs型常微分方程一样，方程$E(\beta,\beta')$在自变数的某些变换下不变。所谓变换群，也就是指在自变数的某些变换下，方程不变，或在变换后方程的解与原方程的解之间可直接用公式联起来。这里，我们主要考虑在自变量平移，相似和反演变换下，解之间的变化规律。

首先可以看出，在平移变换$\xi'=\xi+\mu$，$\eta'=\eta+\mu$（$\mu=\text{const.}$）下，方程不变。故若$u(\xi,\eta)$是$E(\beta,\beta')$的解，则$u(\xi+\mu,\eta+\mu)$也是它的解。

其次，在相似变换$\xi'=\lambda\xi$，$\eta'=\lambda\eta$（$\lambda=\text{const.}$）下，方程不变．故若$u(\xi,\eta)$是$E(\beta,\beta')$的解，则$u(\lambda\xi,\lambda\eta)$也是解。

再看在反演变换下方程的变化规律。令$\xi'=\dfrac{1}{\xi}$，$\eta'=\dfrac{1}{\eta}$，则$E(\beta,\beta')$变为

$$u_{\xi'\eta'}-\frac{\beta'\xi'}{(\xi'-\eta')\eta'}u_{\xi'}+\frac{\beta\eta'}{(\xi'-\eta')\xi'}u_{\eta'}=0.$$

上述方程的不变量为

$$h=\frac{\partial A_1}{\partial\xi'}+A_1B_1=-\frac{\beta'}{(\xi'-\eta')\eta'}+\frac{\beta\xi'}{(\xi'-\eta')\eta'}-\frac{\beta'\beta}{(\xi'-\eta')^2}$$

$$=\frac{\beta'(1-\beta)}{(\xi'-\eta')^2},$$

$$k=\frac{\partial B_1}{\partial\eta'}+A_1B_1=\frac{\beta}{(\xi'-\eta')\eta'}+\frac{\beta\eta'}{(\xi'-\eta')^2\xi'}-\frac{\beta\beta'}{(\xi'-\eta')^2}$$

$$=\frac{\beta(1-\beta')}{(\xi'-\eta)'^2}.$$

如将$\xi'$，$\eta'$仍记为$\xi$，$\eta$，则此不变量与$E(\beta,\beta')$的不变量相同、故这两个方程之间可用一乘子联系起来。而后一方程的解显然是$u\left(\dfrac{1}{\xi},\dfrac{1}{\eta}\right)$．不难找出乘子为

$$M(\xi,\eta)=\exp\int(B_1-B)d\xi+(A_1-A)d\eta$$

$$=\exp\int\frac{\beta}{\xi-\eta}\left(\frac{\eta}{\xi}-1\right)d\xi+\frac{\beta'}{\xi-\eta}\left(1-\frac{\xi}{\eta}\right)d\eta$$

$$=\exp\int-\frac{\beta}{\xi}d\xi-\frac{\beta'}{\eta}d\eta$$

$$=\xi^{-\beta}\eta^{-\beta'}.$$

故由乘子变换公式得

$$u(\xi,\ \eta)=\xi^{-\beta}\eta^{-\beta'}u\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{1}{\eta}\right).$$

即若$u(\xi,\eta)$是$E(\beta,\ \beta')$的解，则$\xi^{-\beta}\eta^{-\beta'}u\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{1}{\xi}\right)$也是$E(\beta,\ \beta')$的解.

现在将上述三种变换结合起来. 设$u(\xi,\ \eta)$是$E(\beta,\beta')$的解. 1°, 令$\xi_1=\lambda_1\xi$, $\eta_1=\lambda_1\eta$, 方程不变, $u(\xi_1,\ \eta_1)$仍是解; 2°, 再令$\xi_2=\xi_1+\mu_1$, $\eta_2=\eta_1+\mu_1$, 方程不变, $u(\xi_2,\eta_2)$仍是解; 3°, 又再令$\xi_3=\frac{1}{\xi_2}$, $\eta_3=\frac{1}{\eta_2}$, 方程的不变量不变, 故而$\xi_2^{-\beta}\eta_2^{-\beta'}u\left(\frac{1}{\xi_2},\ \frac{1}{\eta_2}\right)$也是解, 即$\xi_2^{-\beta}\eta_2^{-\beta'}u(\xi_3,\ \eta_3)$是解; 4°, 最后令$\xi'=\xi_3+\delta$, $\eta'=\eta_3+\delta$, 方程不变, 从而$\xi_2^{-\beta}\eta_2^{-\beta'}u(\xi',\ \eta')$是解. 综合以上四个变换, 得到

$$\xi'=\xi_3+\delta=\frac{1}{\xi_2}+\delta=\frac{1}{\xi_1+\mu_1}+\delta=\frac{\lambda\xi+\mu}{\lambda_1\xi+\mu_1},$$

$$\eta'=\frac{\lambda\eta+\mu}{\lambda_1\eta+\mu_1},$$

其中$\lambda=\lambda_1\delta$, $\mu=\mu_1\delta+1$. 因此, 在分式线性变换

$$\xi'=\frac{\lambda\xi+\mu}{\lambda_1\xi+\mu_1},\qquad \eta'=\frac{\lambda\eta+\mu}{\lambda_1\eta+\mu_1}. \tag{1.34}$$

下，方程$E(\beta,\beta')$的不变量不变。如果$u(\xi,\ \eta)$是解，则

$$(\lambda_1\xi+\mu_1)^{-\beta}(\lambda_1\eta+\mu_1)^{-\beta'}u\left(\frac{\lambda\xi+\mu}{\lambda_1\xi+\mu_1},\ \frac{\lambda\eta+\mu}{\lambda_1\eta+\mu_1}\right). \tag{1.35}$$

也是解。

还须指出，$E$（$\beta$，$\beta'$）在下列三种微分运算下（无穷小变换——Lie变换）不变

$$\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta};\quad \xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta};\quad \xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta^2\frac{\partial}{\partial\eta}+\beta\xi+\beta'\eta.$$

例如

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left[\xi\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\eta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\beta'\frac{\partial u}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]$$

$$=(\xi-\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)-\beta'\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

$$+\beta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

**2.超几何函数特解**

方程$E(\beta,\ \beta')$除了变数可分的特解外，还可求其它特解。由于方程在相似变换$\xi=\lambda\xi_1$，$\eta=\lambda\eta_1$下不变，因此它应有以$\frac{\eta}{\xi}$为变量的特解，即可令$u=F\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=F(z)$。经过简单的计算，得到

$$u_\xi=-F'\frac{\eta}{\xi^2},\qquad u_\eta=F'\frac{1}{\eta},\qquad u_{\xi\eta}=-F''\frac{\eta}{\xi^3}-F'\frac{1}{\xi^2}.$$

代入方程，得到

$$z(1-z)F''(z)+[1-\beta-(1+\beta')z]F'(z)=0.$$

这是超几何方程

$$z(1-z)F''(z)+[c-(a+b+1)z]F'(z)-abF(z)=0$$

当 $a=0$ 时的特殊情形。因此，我们还可引入一个参数 $\alpha$，求 $E(\beta,\ \beta')$ 的形如 $u=\xi^{\alpha}F(z)$ 的特解。

由于

$$u_{\xi}=-F'\xi^{\alpha-2}\eta+\alpha F\xi^{\alpha-1},$$

$$u_{\eta}=F'\xi^{\alpha-1},$$

$$u_{\xi\eta}=-F''\xi^{\alpha-3}\eta-F'\xi^{\alpha-2}+\alpha F'\xi^{\alpha-2},$$

代入得

$$z(1-z)F''(z)+[1-\beta-\alpha-(1+\beta'-\alpha)z]F'(z)$$
$$+\alpha\beta'F(z)=0.$$

它是 $c=1-\beta-\alpha$，$a=-\alpha$，$b=\beta'$ 的超几何方程，有两个独立的特解

$$F\left(-\alpha,\ \beta',\ 1-\alpha-\beta,\ \frac{\eta}{\xi}\right),$$

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\alpha+\beta}F\left(\beta,\ \beta'+\beta+\alpha,\ 1+\beta+\alpha,\ \frac{\eta}{\xi}\right).$$

其中

$$F(a,b,c,z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n,\ |z|<1.$$

而 $(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$。因此，$E(\beta,\ \beta')$ 有特解

$$u_1=\xi^{\alpha}F\left(-\alpha,\ \beta',\ 1-\alpha-\beta,\ \frac{\eta}{\xi}\right), \tag{1.36}$$

$$u_2=\xi^{-\beta}\eta^{\alpha+\beta}F\left(\beta',\ \beta'+\beta+\alpha,\ 1+\beta+\alpha,\frac{\eta}{\xi}\right). \qquad (1.37)$$

**3. Riemann函数**

由偏微分方程的一般知识我们知道，对如下两个自变量的二阶偏微分方程

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0,$$

其共轭方程为

$$M[v]\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial(av)}{\partial x}-\frac{\partial(bv)}{\partial y}+cv=0.$$

所谓$L[u]$的Riemann函数，是指满足如下条件

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x=x_0}=a(x_0,\ y)v(x_0,\ y),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=y^0}=b(x,\ y_0)v(x,\ y_0),$$

且$v(x_0,y_0;x_0,y_0)=1$的$M[v]=0$的解$v(x,y;x_0,y_0)$。

Riemann函数的主要作用是，利用它可以求$L[u]=0$的第一边值问题的解。Riemann函数有许多重要性质。最重要的是对称性，即若记$M[v]=0$的Riemann函数为$v^*(x,\ y;x_1,\ y_1)$，则成立

$$v(x_1,\ y_1;x,\ y)=v^*(x,\ y;\ x_1,\ y_1).$$

现在考虑$E(\beta,\beta')$。易于算出，$E(\beta,\beta')$的共轭方程为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\beta'}{\xi-\eta}\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{\beta+\beta'}{(\xi-\eta)^2}v=0. \qquad (1.38)$$

其Riemann函数就是（1.38）满足如下条件的解

$$\begin{cases} \left.\dfrac{v_\xi}{v}\right|_{\eta=\eta_0} = \dfrac{\beta}{\xi-\eta_0}, \\ \left.\dfrac{v_\eta}{v}\right|_{\xi=\xi_0} = -\dfrac{\beta'}{\xi_0-\eta}, \\ v\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}} = 1. \end{cases} \tag{1.39}$$

条件（1.39）也可改写为

$$\begin{cases} v(\xi,\ \eta_0;\xi_0,\ \eta_0) = \left(\dfrac{\xi-\eta_0}{\xi_0-\eta_0}\right)^{\beta}, \\ v(\xi_0,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0) = \left(\dfrac{\xi_0-\eta}{\xi_0-\eta_0}\right)^{\beta'}. \end{cases} \tag{1.40}$$

易于算出，（1.38）的不变量 $h$，$k$ 分别为

$$h = \frac{\beta(1-\beta')}{(\xi-\eta)^2}, \qquad k = \frac{\beta'(1-\beta)}{(\xi-\eta)^2}.$$

这表明，它与 $E(\beta',\ \beta)$ 有相同的不变量，因而不难找到两者的解之间有如下关系

$$v = (\xi-\eta)^{\beta+\beta'}u(\beta',\ \beta).$$

而由前面得到的 $E(\beta',\ \beta)$ 的特解为

$$u_1 = \xi^{\alpha}F\left(-\alpha,\ \beta,\ 1-\alpha-\beta',\ \frac{\eta}{\xi}\right). \tag{1.36}$$

为了符合Riemann函数含两个参数 $\xi_0$，$\eta_0$ 的要求，利用分式线性变换

$$\xi = \frac{\xi-\eta_0}{\xi_0-\xi}, \qquad \eta = \frac{\eta-\eta_0}{\xi_0-\eta}.$$

由（1.35）将（1.36）变为

$$(\xi_0-\xi)^{-\beta'}(\xi_0-\eta)^{-\beta}\left(\frac{\xi-\eta_0}{\xi_0-\xi}\right)^{\alpha}F(-\alpha,\beta,1-\alpha-\beta',\sigma).$$

故（1.38）有解

$$v=\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}(\xi-\eta_0)^{\alpha}}{(\xi_0-\xi)^{\alpha+\beta'}(\xi_0-\eta)^{\beta}}F(-\alpha,\ \beta,1-\alpha-\beta',\sigma).$$

其中

$$\sigma=\frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}.$$

再选取参数$\alpha$，使得定解条件（1.40）成立。注意到当$\xi=\xi_0$或$\eta=\eta_0$时，$\sigma=0$，$F(-\alpha,\beta,1-\alpha-\beta',\ 0)=1$。
故

$$\lim_{\xi\to\xi_0}v\frac{(\xi_0-\eta)^{\beta'}(\xi_0-\eta_0)^{\alpha}}{(\xi_0-\xi_0)^{\beta'+\alpha}}$$

的分母出现奇性。因此，须取$\alpha=-\beta'$。此时正与（1.40）第二式相同。$\eta=\eta_0$时类似处理。故须取$\alpha=-\beta'$。即

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}}{(\xi_0-\eta)^{\beta}(\xi-\eta_0)^{\beta'}}F(\beta',\beta,1,\sigma). \tag{1.41}$$

其中假定$\eta_0\leqslant\eta<\xi\leqslant\xi_0$。

如令$\xi=x+y$，$\eta=x-y$（$\xi_0=x_0+y_0$，$\eta_0=x_0-y_0$），方程$E(\beta,\ \beta')$变为

$$u_{xx}-u_{yy}-\frac{\beta+\beta'}{y}u_y-\frac{\beta'-\beta}{y}u_x=0.$$

而Riemann函数变为

$$v(x,\ y;x_0,\ y_0)=\frac{(2y)^{\beta+\beta'}}{(y+y_0+x_0-x)^{\beta}(y+y_0-x_0+x)^{\beta'}}\times F\left(\beta',\ \beta,\ 1,\ \frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2}{(y+y_0)^2-(x-x_0)^2}\right).$$

这样，在($\xi$，$\eta$)平面上，对$\eta_0 \leqslant \eta < \xi \leqslant \xi_0$区域内，我们就得到了$E(\beta, \beta')$的Riemann函数。由于超几何函数以0，1，$\infty$为奇点，所以（1.42）仅在上述区域内成立。而至于在其它区域的情形，还须进一步讨论。

首先，对应于$\sigma = 1$是奇线$\xi = \eta$，它将平面分成两部分$\xi > \eta$和$\xi < \eta$。由于这两部分对称，只须考虑$\xi > \eta$的情况即可。由任一点（$\xi_0$，$\eta_0$）出发的两条特征线$\xi = \xi_0$和$\eta = \eta_0$（对应于$\sigma = 0$）以及由这两条特征线到奇线$\xi = \eta$上反射回来的反射特征线$\eta = \xi_0$和$\xi = \eta_0$（对应于$\sigma = \infty$），将半平面$\xi > \eta$分成四个区域：Ⅰ，Ⅱ，Ⅱ′，Ⅲ，Ⅳ和Ⅳ′，如图2。

表达式（1.42）只适用于Ⅰ，Ⅳ这两个区域，$0 < \sigma < 1$。

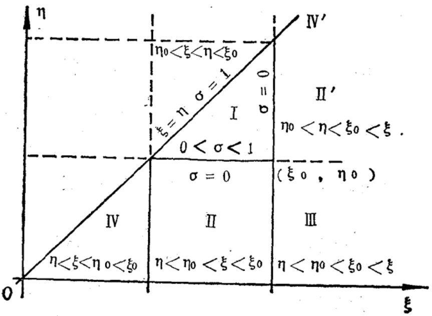



图2

在奇线$\xi=\eta$上，$\sigma=1$，因此是$F(\beta, \beta', 1, \sigma)$的奇点。故在$\sigma=1$附近，要利用超几何函数的开拓公式。有

$$F(\beta,\beta' 1,\sigma)=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}F(\beta,\beta',\beta+\beta',1-\sigma)$$

$$+\frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}(1-\sigma)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ 1-\sigma), \qquad (1.43)$$

而

$$1-\sigma=1-\frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}=\frac{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}.$$

从而，在$\sigma=1$附近有

$$v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\eta_0)=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}$$

$$\times\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}}{(\xi_0-\eta)^{\beta}(\xi-\eta_0)^{\beta'}}[1+0(\xi-\eta)]$$

$$+\frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\cdot\frac{(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}}{(\xi-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\xi_0-\eta)^{1-\beta-\beta'}}$$

$$\times\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}}{(\xi_0-\eta)^{\beta}(\xi-\eta_0)^{\beta'}}[1+0(\xi-\eta)]$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}\cdot\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}}{(\xi_0-\eta)^{\beta}(\xi-\eta_0)^{\beta'}}[1+0(\xi-\eta)]$$

$$+\frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\cdot\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta)^{1-\beta'}(\xi-\eta_0)^{1-\beta}}$$

$$\times[1+0(\xi-\eta)]. \qquad (1.44)$$

这是否有奇性，就要由$\beta+\beta'$的值而定。

若通过特征线$\eta=\eta_0$（$\xi=\xi_0$类似），就要应用如下开拓公式

$$F(a,b,c,z)=(1-z)^{-a}F\left(a,\ c-b,\ c,\frac{z}{z-1}\right),$$

始能将Riemann函数由区域Ⅰ延拓至区域Ⅱ. 此时

$$F(\beta,\beta',1,\sigma)=(1-\sigma)^{-\beta}F\left(\beta,\ 1-\beta',1,\ \frac{\sigma}{\sigma-1}\right).$$

经简单计算，Riemann函数为

$$v(\xi,\eta;\ \xi_0,\ \eta_0)=\frac{(\xi-\eta)^{\beta'}(\xi_0-\eta)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{\beta}}$$

$$\times F\left(\beta,\ 1-\beta',\ 1,\ \frac{1}{\sigma'}\right),\tag{1.45}$$

其中$\frac{1}{\sigma'}=\frac{\sigma}{\sigma-1}$. 所以

$$\sigma'=1-\frac{1}{\sigma}=\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\eta-\eta_0)(\xi-\xi_0)}.\tag{1.46}$$

如果我们要将Riemann 函数继续通过反射特征线$\xi=\eta_0$（$\eta=\xi_0$类似）进行延拓时，则遇到了严重困难. 在区域Ⅳ中有$0<\sigma'<1$，按理说应该利用公式

$$F(a,\ b,\ c,\ z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}$$

$$\times F\left(a,\ 1-c+a,\ 1-b+a,\ \frac{1}{z}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}$$

$$\times F\left(b,\ 1-c+b,\ 1-a+b,\ \frac{1}{z}\right),$$

进行延拓而得

$$\frac{(\xi-\eta)^{\beta'}(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{\beta}}F\left(\beta,\ 1-\beta',\ 1,\frac{1}{\sigma'}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}(-1)^{\beta}\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta_0-\eta)^{\beta'}}$$

$$\times F(\beta,\ \beta,\ \beta+\beta',\ \sigma')$$

$$-\frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}(-1)^{-\beta'}$$

$$\times\frac{(\xi-\eta)(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta'}(\eta_0-\eta)^{1-\beta'}}$$

$$\times F(1-\beta',\ 1-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \sigma'). \qquad (1.47)$$

但上式右端却出现复值$(-1)^{\beta}$. 此外，当$\sigma'\to1$(即$\xi\to\eta_0$)时，上述两个超几何函数可能出现奇性. 例如$\beta=\beta'$时有对数奇性. 因此，一般来说$\xi=\eta_0$（$\eta=\xi_0$）是Riemann函数的间断线.

**4.求Riemann函数的其它方法**

以上求Riemann函数（简写为R-函数）的方法虽然巧妙，但多少还有些不自然. Copson〔*Arch Rational Anal* I (1958)〕总结了已知的求*R*-函数的六种方法，其中以Chaundy的方法值得注意. 我们以一例说明.

求方程（1.26）

$$u_{xx}-u_{yy}-\frac{2\beta}{y}u_y-b^2u=0$$

的Riemann函数.

为处理简便起见，先将方程化为自共轭形式。令$\bar{u}=y^{\beta}u$，则(1.26)变为

$$\bar{u}_{xx}-\bar{u}_{yy}-\left[\frac{\beta(1-\beta)}{y^2}+b^2\right]\bar{u}=0.$$

再引入特征坐标$\xi=x+y$，$\eta=x-y$，则得

$$\bar{u}_{\xi\eta}-\left[\frac{\beta(1-\beta)}{(\xi-\eta)^2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\bar{u}=0. \tag{1.26$'$}$$

这是一个自共轭方程，R-函数在特征线$\xi=\xi_0$，$\eta=\eta_0$的值均为1，所以问题就简化得多。

回顾一下 EPD 方程求R-函数的过程，关键在于化为超几何方程求解．而后者实际上是用幂级数法解出的．这就是说，引入自变量变换

$$\sigma'=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}$$

后，R-函数就归结为求形如$\sum\limits_{n}a_n\sigma'^n$的幂级数．我们试用这种思想求(1.26)$'$的R-函数。令

$$x_1=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)},\quad x_2=(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0).$$

则

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial x_1}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x_2},\quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial x_1}{\partial\xi}\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi}\frac{\partial x_2}{\partial\eta}+\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial x_2}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$+\frac{\partial x_2}{\partial\xi}\frac{\partial x_2}{\partial\eta}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$+\frac{\partial^2 x_2}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

而

$$\frac{\partial x_1}{\partial\xi}\frac{\partial x_1}{\partial\eta}=\frac{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)(\xi-\eta)^2}x_1^2=\frac{(1-x_1)x_1}{(\xi-\eta)^2},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\xi}\frac{\partial x_2}{\partial\eta}+\frac{\partial x_1}{\partial\eta}\frac{\partial x_2}{\partial\xi}=\frac{\xi_0-\eta}{\xi-\eta}x_1+\frac{\xi-\eta_0}{\xi-\eta}x_1=x_1+\frac{x_2}{(\xi-\eta)^2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial\xi}\frac{\partial x_2}{\partial\eta}=(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)=x_2,$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{(\xi_0-\eta)-(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)^2}+2\frac{(\xi_0-\eta)(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)^3}$$

$$=\frac{1}{(\xi-\eta)^2}-2\frac{x_1}{(\xi-\eta)^2},\quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial\xi\partial\eta}=1.$$

将以上结果代入（1.26）′，得到

$$\frac{(1-x_1)x_1}{(\xi-\eta)^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1^2}+\left[x_1+\frac{x_2}{(\xi-\eta)^2}\right]\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1\partial x_2}+x_2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_2^2}$$

$$+\frac{1-2x_1}{(\xi-\eta)^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}$$

$$+\frac{\beta(\beta-1)}{(\xi-\eta)^2}\bar{u}-\frac{b^2}{4}\bar{u}=0. \tag{1.48}$$

将（1.48）分为两个方程，如$\bar{u}$同时满足下列方程组

$$\begin{cases}(1-x_1)x_1\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1^2}+x_2\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1\partial x_2}+(1-2x_1)\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x_1}+\beta(\beta-1)\bar{u}=0, & (1.49)\\[2ex] x_2\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_2^2}+x_1\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}-\dfrac{b^2}{4}\bar{u}=0. & (1.50)\end{cases}$$

则显然也满足（1.48）．但如令$x_2'=\left(\frac{b}{2}\right)^2x^2$，则（1.49）和（1.50）就变为Horn函数$E_2(a,\ b,\ c,\ x_1,\ x_2)$所满足的方程组

$$\begin{cases}(1-x_1)x_1\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1^2}+x_2\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1\partial x_2}+[c-(a+b+1)x_1]\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x_1} \\ \quad -ab\bar{u}=0, & (1.49)' \\ x_2\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_2^2}+x_1\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial x_1\partial x_2}+c\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}-\bar{u}=0. & (1.50)'\end{cases}$$

当$a=\beta$，$b=1-\beta$，$c=1$时的特例．而

$$E_2(a,\ b,\ c,\ x_1,\ x_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_{m+n}m!n!}x_1{}^m x_2{}^n,$$

$$|x_1|<1, \tag{1.51}$$

所以（1.26）′的R-函数为

$$E_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m(1-\beta)_m}{(m+n)!m!n!}\left[\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}\right]^m$$

$$\times\left[\frac{b^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)\right]^n. \tag{1.52}$$

若$b=0$，方程变为$E(\beta,\ \beta)$．这时（1.52）变为

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\ \eta_0)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m(1-\beta)_m}{(m!)^2}\left[\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}\right]^m$$

$$=F\left(\beta,\ 1-\beta,\ 1,\ \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}\right).$$

这就是$\beta=\beta'$时的EPD方程的R-函数．

若$\beta=0$，这时变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{b}{2}\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]^{2n}$$

$$=J_0(ib\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}).$$

这就是电报方程的R-函数.

## §6. EPD方程几类解的表达式

Riemann函数求出后，就可以利用它来解EPD方程的Cauchy问题或Goursat问题. 这样得出的解的表达式和前面的Poisson表达式之间有什么关系呢?

### 1. Riemann函数表示为Poisson形式

由Riemann函数定义我们知道，$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$对于点$(\xi,\eta)$而言是方程$E(\beta,\beta')$的一个特殊的Goursat问题的解. 它能不能表示为Poisson表达式（1.22）呢?

先分析一下在$\xi=\eta$附近两者之间的关系. 在（1.22）式中，第一项是

$$\int_\eta^\xi \phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt,$$

令$t=\xi-(\xi-\eta)\tau$，得到

$$\int_\eta^\xi \phi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt$$

$$=(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\phi[\xi-(\xi-\eta)\tau]\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta'}d\tau.$$

当$\xi-\eta\to0$时，将$\phi$按$(\xi-\eta)\tau$的幂次展开，有

$$\phi[\xi-(\xi-\eta)\tau]=\phi(\xi)+\phi'[\xi-(\xi-\eta)\tau]\Big|_{\xi=\eta}[(\xi-\eta)\tau]$$

$$+\frac{1}{2}\phi''[\xi-(\xi-\eta)\tau]\Big|_{\xi=\eta}[(\xi-\eta)\tau]^2+\cdots.$$

于是

$$\int_\eta^\xi \phi(t)(\xi-t)^{-\beta'}(t-\eta)^{-\beta'}dt=\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}$$

$$\times\phi(\xi)(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}[1+0(\xi-\eta)]. \qquad (1.53)$$

同理，将$\psi[\xi-(\xi-\eta)\tau]$按$(\xi-\eta)\tau$展开，得

$$(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_\eta^\xi\psi(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}dt$$

$$=\int_0^1\psi[\xi-(\xi-\eta)\tau]\tau^{\beta'-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta+\beta')}\psi(\xi)[1+0(\xi-\eta)]. \qquad (1.54)$$

再看Riemann函数$v(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)$。它关于点$(\xi_0,\ \eta_0)$满足方程$E(\beta,\ \beta')$。为了记号统一起见，我们将$(\xi,\ \eta)$换为$(\xi_1,\ \eta_1)$并视为定点，将$(\xi_0,\ \eta_0)$换为$(\xi,\ \eta)$并视为动点。在$\xi=\eta$附近，由（1.44）式，其主部为

$$v(\xi_1,\ \eta_1,\ \xi,\ \eta)=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}(\xi_1-\eta)^{-\beta'}$$

$$\times(\xi-\eta_1)^{-\beta}(\xi_1-\eta_1)^{\beta+\beta'}[1+0(\xi-\eta)]$$

$$+\frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}(\xi_1-\eta)^{\beta-1}(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times(\xi-\eta_1)^{\beta'-1}[1+0(\xi-\eta)]. \qquad (1.55)$$

将（1.55）和（1.53），（1.54）比较，立即看出，如果R-函数$V$能用Poisson表达式表出，则应有

$$\varphi(\xi)=-c(\xi_1-\eta)^{\beta-1}(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta_1)^{\beta'-1},$$

$$\psi(\xi)=c(\xi_1-\eta)^{-\beta'}(\xi-\eta_1)^{-\beta}(\xi_1-\eta_1)^{\beta+\beta'},$$

其中 $c=\dfrac{\Gamma(1-\beta-\beta')\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(1-\beta')}$.

应注意到，上式是在 $\xi-\eta\to 0$ 时得到的，可以认为，$\xi=\eta$，再令 $\xi=t$，则有

$$\varphi(t)=-c(\xi_1-t)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_1-\eta_1),$$

$$\psi(t)=c(\xi_1-t)^{-\beta'}(t-\eta_1)^{-\beta}(\xi_1-\eta_1)^{\beta+\beta'},$$

代入公式（1.22）得

$$\begin{aligned}v(\xi_1,\xi,\eta)&=c(\xi_1-\eta_1)^{\beta+\beta'}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\\&\quad\times\int_\eta^\xi(\xi_1-t)^{-\beta'}(t-\eta_1)^{-\beta}(\xi-t)^{\beta'-1}dt\\&\quad-c(\xi_1-\eta_1)\int_\eta^\xi(\xi_1-t)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi-t)^{-\beta}\\&\quad\times(t-\eta)^{-\beta'}dt.\end{aligned}\tag{1.56}$$

以上仅是一个分析过程，推断出如能用Poisson表达式表示R-函数，就应该是（1.56）式。

现证（1.56）确实成立。利用（1.41），（1.43)和(1.44）及超几何函数的积分表达式

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1\tau^{a-1}(1-\tau)^{c-a-1}$$

$$(1-z\tau)^{-b}d\tau,$$

将R-函数写为积分形式

$$v(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)=c\frac{(\xi_1-\eta_1)^{\beta+\beta'}}{(\xi_1-\eta)^{\beta'}(\xi-\eta_1)^{\beta}}$$

$$\times\left\{\int_0^1\tau^{\beta'-1}(1-\tau)^{\beta-1}[1-(1-\sigma)\tau]^{-\beta}d\tau\right.$$

$$-(1-\sigma)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1 \tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta'}[1-(1-\sigma)\tau]^{\beta'-1}d\tau\Big\},$$
$$(1.57)$$

其中

$$\sigma=\frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}.$$

我们要寻求将（1.57）变为（1.56）的变换．先分析一下变换的要求．首先要将积分限由（0，1）变到$(\eta,\ \xi)$，换言之，$\tau=0\to\tau_1=\xi$，$\tau=1\to\tau_1=\eta$，还应要求

$$1-(1-\sigma)\tau=\alpha(\tau_1-\eta_1).$$

首先选取$\alpha$，使上述要求满足．因为

$$1-\sigma=\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)},$$

所以

$$1-(1-\sigma)\tau=1-\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\tau=\alpha(\tau_1-\eta_1),$$

在上式中令$\tau_1=\eta$，则$\tau=1$，于是

$$\alpha\Big|_{\tau_1=\eta}(\eta-\eta_1)=1-\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}$$
$$=\frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}.$$

由此推出

$$\alpha\Big|_{\tau_1=\eta}=\frac{\xi_1-\xi}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}.$$

再令$\tau_1=\xi$，则$\tau=0$，于是

$$\alpha\Big|_{\tau_1=\xi}(\xi-\eta_1)=1.$$

即

$$\alpha\Big|_{\tau_1=\xi}=\frac{1}{\xi-\eta_1}.$$

因此，取

$$\alpha=\frac{\xi_1-\xi}{(\xi_1-\tau_1)(\xi-\eta_1)}$$

即可．这样

$$\tau=\frac{1-\alpha(\tau_1-\eta_1)}{1-\sigma}=\frac{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)}\left[1-\frac{(\xi_1-\xi)(\tau_1-\eta_1)}{(\xi_1-\eta_1)(\xi_1-\tau_1)}\right]$$

$$=\frac{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)}\cdot\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\tau_1)}{(\xi-\eta_1)(\xi_1-\tau_1)}$$

$$=\frac{(\xi_1-\eta)(\xi-\tau_1)}{(\xi-\eta)(\xi_1-\tau_1)}.$$

将（1.57）作上述代换后，再将积分变量$\tau_1$改为$t$，经过简单计算，即得（1.56）．从而表明了：$E(\beta,\ \beta')$的 Rieman 函数$v(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)$可以表为Poisson形式．

**2．Poisson定理**

既然R–函数作为特殊的Goursat问题的解，可用Poisson表达式表出，自然会估计到对一般的Goursat问题的解，也可用Poisson表达式表出．这就是下述定理．

**定理**（Poisson）方程$E(\beta,\ \beta')$的Goursat问题

$$\begin{cases} u_{\xi\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}u_\xi+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}u_y=0, \\ u(\xi_1,\ \eta)=u_0(\eta), \qquad u_0(\eta_1)=u_1(\xi_1) \\ u(\xi,\ \eta_1)=u_1(\xi). \end{cases}\tag{1.59}$$

的解，可以表示为Poisson形式（1.22）．

**证明** 在图3中的特征三角形$BPQ$内的矩形$ABCD$上利用

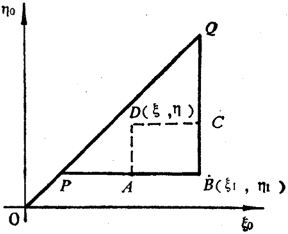



图 3

Riemann公式

$$VE(\beta,\beta')u-uM[v]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{2\beta'}{\xi-\eta}uv\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{2\beta}{\xi-\eta}uv\right)$$

和Green公式将问题（1.59）的解表为

$$u(D)=(uv)_B-\int_A^B v\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_0}+\frac{\beta}{\xi_0-\eta_1}u\right)d\xi_0$$

$$+\int_B^C v\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_0}-\frac{\beta'}{\xi_1-\eta_0}\right)d\eta_0,$$

或者

$$u(\xi,\eta)=v(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)u_1(\xi_1)$$

$$-\int_\xi^{\xi_1}v(\xi_0,\eta_1;\xi_1,\eta)[u_1'(\xi_0)+bu_1(\xi_0)]d\xi_0$$

$$+\int_{\eta_1}^{\eta}v(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)[u_0'(\eta_0)+au_0(\eta_0)]d\eta_0. \quad (1.60)$$

其中 $v$ 是Riemann函数，$a=\dfrac{-\beta'}{\xi_1-\eta_0}$，$b=\dfrac{\beta}{\xi_0-\eta_1}$。下面证明(1.60)可以化为(1.22)的形式。

由于Riemann函数可以表为Poisson形式，所以只须考虑(1.60)右端的二，三两项。先看第二项，将 $v$ 的表达式(1.56)代入得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\xi}^{\xi_1} v(\xi_0,\ \eta_1;\ \xi,\eta)[u_1'(\xi_0)+bu_1(\xi_0)]d\xi_0\\
&=c(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{\xi}^{\xi_1}\int_{\eta}^{\xi}(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}(u_1'+bu_1)\\
&\quad\times(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}(\xi_0-t)^{-\beta'}(t-\eta_1)^{-\beta}dtd\xi_0\\
&\quad-c\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}\left[\int_{\xi}^{\xi_1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_0-\eta_1)\right.\\
&\quad\left.\times(\xi_0-t)^{\beta-1}(u_1'+bu_1)d\xi_0\right]dt\\
&=I_2,
\end{aligned}
$$

交换积分次序得

$$
\begin{aligned}
I_2=&c(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}\left[\int_{\xi}^{\xi_1}(t-\eta_1)^{-\beta}\right.\\
&\left.\times(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}(\xi_0-t)^{-\beta'}(u_1'+bu_1)d\xi_0\right]dt\\
&-c\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}\left[\int_{\xi}^{\xi_1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_0-\eta_1)\right.\\
&\left.\times(\xi_0-t)^{\beta-1}(u_1'+bu_1)d\xi_0\right]dt.
\end{aligned}
$$

至此可见Poisson核已经出来，但方括号内里积分形式的函数还含有 $\xi$，不能直接取为 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，因此要设法使得里面的积分限与 $\xi$，$\eta$ 无关。如果将下限换为与 $\xi$，$\eta$ 无关的量，例如换为 $t$，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\xi}^{\xi_1} v(\xi_0,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)(u_1'+bu_1)d\xi_0\\
&=c(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}
\end{aligned}
$$

$$\times \left[\int_t^{\xi_1}(t-\eta_1)^{-\beta}(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}(\xi_0-t)^{-\beta'}(u_1'+bu_1)\right]dt$$

$$-c\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}\left[\int_t^{\xi_1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_0-\eta_1)\right.$$

$$\left.\times(\xi_0-t)^{\beta-1}(u_1'+bu_1)\right]dt$$

$$-\left\{c(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_\eta^\xi(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}\right.$$

$$\times\left[\int_t^\xi(t-\eta_1)^{-\beta}(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}(\xi_0-t)^{-\beta'}\right.$$

$$\left.\times(u_1'+bu_1)d\xi_0\right]dt$$

$$-c\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}\left[\int_t^\xi(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_0-\eta_1)\right.$$

$$\left.\left.\times(\xi_0-t)^{\beta-1}(u_1'+bu_1)d\xi_0\right]dt\right\}$$

由上面可见，如果有恒等式

$$(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_\eta^\xi(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}\left[\int_t^\xi(t-\eta_1)^{-\beta}\right.$$

$$\left.\times(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}(\xi_0-t)^{-\beta'}(u_1'+bu_1)d\xi_0\right]dt$$

$$\equiv\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}\left[\int_t^\xi(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_0-\eta_1)\right.$$

$$\left.\times(\xi_0-t)^{\beta-1}(u_1'+bu_1)d\xi_0\right]dt. \tag{1.61}$$

成立，则令

$$\varphi(t)=-c\int_t^{\xi_1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_0-\eta_1)(\xi_0-t)^{\beta-1}$$

$$\times(u_1'+bu_1)d\xi_0,$$

$$\psi(t)=c\int_t^{\xi_1}(t-\eta_1)^{-\beta}(\xi_0-t)^{-\beta'}(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}$$

$$\times(u_1'+bu_1)d\xi_0.$$

即可将（1.60）式的第二项化为Poisson表达式了。

同样的方法也可将（1.60）式的第三项化为Poisson表达式。

总起来，只要（1.60）式能成立，则（1.60）的右端就可表为Poisson形式，其中

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&-c(\xi_1-\eta_1)(\xi_1-t)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}u_1(\xi_1)\\&+c(t-\xi_1)^{\beta'-1}\\&\times\int_t^{\xi_1}(\xi_0-\eta_1)(\xi_0-t)^{\beta-1}(u_1'+bu_1)d\xi_0\\&-c(\xi_1-t)^{\beta-1}\int_{\eta_1}^t(\xi_1-\eta_0)(t-\eta_0)^{\beta'-1}(u_0'+au_0)d\eta_0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(t)=&c(\xi_1-\eta_1)^{\beta+\beta'}(\xi_1-t)^{-\beta'}(t-\eta_1)^{-\beta}u_1(\xi_1)\\&-c(t-\eta_1)^{-\beta}\int_t^{\xi_1}(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}(\xi_0-t)^{-\beta'}(u_1'+bu_1)d\xi_0\\&+c(\xi_1-t)^{-\beta'}\int_{\eta_1}^t(\xi_1-\eta_0)^{\beta+\beta'}(t-\eta_0)^{-\beta}\\&\times(u_0'+au_0)d\eta_0.\end{aligned}$$

乍看起来似乎$\varphi(t)$与$\psi(t)$在$t=\xi_1$与$t=\eta_1$时可能无界，然而并非如此。例如，当$t=\xi_1$时，$\varphi(t)$右端第二项显然趋于零。而第三项进行分部积分，并注意$a=-\dfrac{\beta'}{\xi_1-\eta_0}$，则有

$$\begin{aligned}&-c(\xi_1-t)^{\beta-1}\int_{\eta_1}^t(\xi_1-\eta_0)(t-\eta_0)^{\beta'-1}\left(u_0'-\frac{\beta'}{\xi_1-\eta_0}u_0\right)d\eta_0\\&=-c(\xi_1-t)^{\beta-1}\int_{\eta_1}^t(\xi_1-\eta_0)(t-\eta_0)^{\beta'-1}u_0'd\eta_0\\&\quad-c(\xi_1-t)^{\beta-1}\int_{\eta_1}^t u_0(\eta_0)d(t-\eta_0)^{\beta'}\end{aligned}$$

$$= -c(\xi_1-t)^{\beta-1}\int_{\eta_1}^{t}(\xi_1-\eta_0)(t-\eta_0)^{\beta'-1}u_0'd\eta_0$$

$$+c(\xi_1-t)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{\beta'}u_0(\eta_1)$$

$$+c(\xi_1-t)^{\beta-1}\int_{\eta_1}^{t}(t-\eta_0)^{\beta'}u_0'd\eta_0$$

$$=c(\xi_1-t)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{\beta'}u_0(\eta_1)$$

$$-c(\xi_1-t)^{\beta}\int_{\eta_1}^{t}(t-\eta_0)^{\beta'-1}u_0'd\eta_0.$$

当$t\to\xi_1$时上式最后一项积分趋于零．故第三项为

$$\lim_{t\to\xi_1}c(\xi_1-t)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{\beta'}u_0(\eta_1),$$

而第一项为

$$-\lim_{t\to\xi_1}c(\xi_1-\eta)(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_1-t)^{\beta-1}u_1(\xi_1),$$

利用$u_1(\xi_1)=u_0(\eta_1)$，一，三两项合并起来就得

$$\lim_{t\to\xi_1}cu_0(\eta_1)(\xi_1-t)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{\beta'-1}(t-\eta_1-\xi_1+\eta_1)$$

$$=-\lim_{t\to\xi_1}cu_0(\eta_1)(\xi_1-t)^{\beta}(t-\eta_1)^{\beta'-1}=0.$$

故

$$\lim_{t\to\xi_1}\varphi(t)=0.$$

对于$t=\eta_1$也可进行类似的讨论．类似可证$\varphi(t)$，$\psi(t)$在$[\eta_1,\xi_1]$上是两次连续可微的．于是，整个定理只剩下证明一个关键的恒等式（1.61）．

事实上，对（1.61）利用Dirichlet公式交换积分次序，则

$$c(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi}(\xi_0-\eta_1)^{\beta+\beta'}(u_1'+bu_1)$$

$$\times\left[\int_{\eta}^{\xi_0}(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}(t-\eta_1)^{-\beta}(\xi_0-t)^{-\beta'}dt\right]d\xi_0$$

$$=c\int_{\eta}^{\xi}(\xi_0-\eta_1)(u_1'+bu_1)\left[\int_{\eta}^{\xi_0}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}\right.$$

$$\left.\times(t-\eta_1)^{\beta'-1}(\xi_0-t)^{\beta-1}dt\right]d\xi_0.$$

从而问题归结为证明恒等式

$$(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi_0}(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}(\xi_0-t)^{-\beta'}(t-\eta_1)^{-\beta}dt$$

$$=(\xi_0-\eta_1)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi_0}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}(t-\eta_1)^{\beta'-1}$$

$$\times(\xi_0-t)^{\beta-1}dt. \tag{1.61)'$$

注意到上式两端被积函数的指数和均等于－2，故可用分式线性变换将它们分别化为超几何函数，而这个变换正是前面的变换（1.58）的逆变换。

$$t=\frac{\xi_0(\xi-\eta)-\tau\xi(\xi_0-\eta)}{(\xi-\eta)-\tau(\xi_0-\eta)},$$

此时，

$$\xi_0-t=\frac{(\xi_0-\eta)(\xi-\xi_0)\tau}{\Delta},\quad \xi-t=\frac{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta)}{\Delta},$$

$$t-\eta=\frac{(\xi_0-\eta)(\xi-\eta)(1-\tau)}{\Delta},$$

$$t-\eta_1=\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_1)}{\Delta}\left(1-\frac{(\xi_0-\eta)(\xi-\eta_0)\tau}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_1)}\right)$$

$$=\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)(1-\sigma\tau)}{\Delta},$$

$$dt=\frac{(\xi_0-\eta)(\xi-\eta)(\xi-\xi_0)}{\Delta^2}d\tau,$$

其中

$$\Delta=(\xi-\eta)-\tau(\xi_0-\eta),\quad \sigma=\frac{(\xi_0-\eta)(\xi-\eta_0)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}.$$

将以上各式代入 (1.61)′两端，则

$$\begin{aligned}\text{左端}&=(\xi-\eta)^{-\beta}(\xi_0-\eta)^{\beta-\beta'}(\xi_0-\eta_1)^{-\beta}\\&\quad\times\int_0^1\tau^{-\beta'}(1-\tau)^{\beta-1}(1-\sigma\tau)^{-\beta}d\tau\\&=(\xi-\eta)^{-\beta}(\xi_0-\eta)^{\beta-\beta'}(\xi_0-\eta_1)^{-\beta}\\&\quad\times\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)}F(1-\beta',\ \beta,\ 1+\beta-\beta',\sigma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右端}&=(\xi_0-\eta_1)^{-\beta}(\xi-\eta)^{-\beta}(\xi_0-\eta)^{\beta-\beta'}\\&\quad\times\int_0^1\tau^{\beta-1}(1-\tau)^{-\beta'}(1-\sigma\tau)^{\beta-1}d\tau\\&=(\xi_0-\eta_1)^{-\beta}(\xi-\eta)^{-\beta}(\xi_0-\eta)^{\beta-\beta'}\\&\quad\times\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta')\Gamma(\beta)}F(\beta,\ 1-\beta',1+\beta-\beta',\sigma).\end{aligned}$$

因此，(1.61)′实质上是一个超几何函数的恒等式

$$F(a,\ b,\ a+b,\ \sigma)=F(b,\ a,\ a+b,\ \sigma).$$

注 1　如果在 (1.61)′的左端作变换

$$t=\frac{\eta\eta_1(\xi_1-\xi)+\xi\xi_0(\eta-\eta_1)-(\xi_0\eta-\xi\eta_1)t_1}{(\xi-\xi_0-\eta-\eta_1)t_1-(\xi\eta_1-\xi_0\eta)},$$

则可直接化到右端.

注 2　Poisson 定理也可以这样陈述：当 $\beta+\beta'\neq 1$ 时，方程 $E(\beta,\ \beta')$ 在 $\xi=\eta$ 附近的两次连续可微解恒表为(1.22)式. 当 $\beta+\beta'=1$ 时，这个定理也已证明.

### 3. Volterra表达式

前面我们已经指出，方程 $E$ ($\beta$, $\beta'$) 的 Riemann 函数和

Goursat问题的解均可以表示为Poisson形式。本节我们还要指出，对$\beta=\beta'$的$E(\beta,\ \beta')$而言，解的 Volterra 表达式仍可以用Poisson形式表示出来。

1984年，Volterra (*Acta*. *Math*. 18. 161)曾对$\beta=\beta'=\frac{1}{2}$的特殊情形得到另一种形式的解，这种解如果对于$\beta=\beta'$的方程

$$u_{xx}-u_{yy}-\frac{2\beta}{y}u_y=0$$

来说，可以写为

$$u_1(x,\ y)=y^{1-2\beta}\int_0^\infty \varphi(x\pm y\cosh\theta)\sinh^{1-2\beta}\theta d\theta$$

$$=\int_y^\infty \varphi(x\pm t)(t^2-y^2)^{-\beta}dt, \tag{1.62$_1$}$$

$$u_2(x,\ y)=\int_0^\infty \psi(x\pm y\cosh\theta)\sinh^{2\beta-1}\theta d\theta$$

$$=y^{1-2\beta}\int_y^\infty \psi(x\pm t)(t^2-y^2)^{\beta-1}dt. \tag{1.62$_2$}$$

其中$\varphi$，$\psi$在无穷远处一般是趋于零。F. G. Friedlander 和 A. E. Heins (Arch. Rat. Mech. Anal. 33 (1969) 219—230) 和A. Erdelyi (J. D'Analyse Math. 23(1970)89－102) 曾讨论过这种Volterra形式的解与Poisson形式的解的关系。

实际上，在用特解求通解的方法导出 Poisson 形式解的过程中，我们已经知道积分

$$\int_0^\infty \varphi(x\pm t)|t^2-y^2|^{-\beta}dt$$

和

$$y^{1-2\beta}\int_0^{\infty}\psi(x\pm t)|t^2-y^2|^{\beta-1}dt$$

是方程$E$（$\beta$，$\beta'$）的解．因此去掉Poisson形式解（1.24)′和（1.25）′

$$\int_0^y \varphi(x\pm t)(y^2-t^2)^{-\beta}dt, \tag{1.24$'$}$$

$$y^{1-2\beta}\int_0^y \psi(x\pm t)(y^2-t^2)^{\beta-1}dt. \tag{1.25$'$}$$

之后，也仍是解．这种解就是（1.62)$_1$和（1.62)$_2$．

下面我们证明，在（1.24)′和（1.25)′中适当选取$\varphi$和$\psi$，使其即为（1.62)$_1$和（1.62)$_2$．如果在

$$\int_{-y}^{y}\varphi(x+t)(y^2-t^2)^{-\beta}dt$$

中以

$$\varphi(t)=\int_t^{\infty}f(\tau)(t-\tau)^{2\beta-2}d\tau$$

代入第一个积分，就有

$$\int_{-y}^{y}(y^2-t^2)^{-\beta}\int_{x+t}^{\infty}f(\tau)(t-\tau)^{2\beta-2}d\tau dt$$

$$=\int_{-y}^{y}(y^2-t^2)^{-\beta}\Big[\int_t^y f(x+\tau)(t-\tau)^{2\beta-2}d\tau$$

$$+\int_y^{\infty}f(x+\tau)(t-\tau)^{2\beta-2}d\tau\Big]dt$$

$$=\int_{-y}^{y}f(x+\tau)\int_{-y}^{\tau}(y^2-t^2)^{-\beta}(t-\tau)^{2\beta-2}dtd\tau$$

$$+\int_y^{\infty}f(x+\tau)\int_{-y}^{y}(y^2-t^2)^{-\beta}(t-\tau)^{2\beta-2}dtd\tau$$

$$=I_1+I_2.$$

如果在$I_1$里面的积分中，令$t=\tau-(y+\tau)s$，则$t-\tau=-$

$(y+\tau)s$, $y+t=(y+\tau)(1-s)$. $y-t=y-\tau+(y+\tau)s$.

从而

$$\int_{-y}^{\tau}(y^2-t^2)^{-\beta}(t-\tau)^{2\beta-2}dt=(y+\tau)^{\beta-1}(y-\tau)^{-\beta}$$

$$\times\int_0^1 s^{2\beta-2}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{\tau+y}{\tau-y}s\right)^{-\beta}ds$$

$$=(y+\tau)^{\beta-1}(y-\tau)^{-\beta}\frac{\Gamma(2\beta-1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)}$$

$$\times F\left(2\beta-1,\ \beta,\ \beta,\frac{\tau+y}{\tau-y}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(2\beta-1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)}(y+\tau)^{\beta-1}(y-\tau)^{-\beta}\left(1+\frac{y+\tau}{y-\tau}\right)^{2\beta}$$

$$=\frac{\Gamma(2\beta-1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)}(y^2-\tau^2)^{\beta-1}(2y)^{1-2\beta}.$$

从而

$$I_1=\frac{\Gamma(2\beta-1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)}(2y)^{1-2\beta}\int_{-y}^{y}f(x+\tau)(y^2-\tau^2)^{\beta-1}d\tau.$$

在$I_2$里面的积分中，令$t=y(1-2s)$，则

$y-t=2ys$, $y+t=2y(1-s)$, $t-\tau=y-\tau-2ys$,

$$dt=-2yds,\ \int_{-y}^{y}(y^2-t^2)^{-\beta}(t-\tau)^{2\beta-2}dt$$

$$=(2y)^{1-2\beta}(y-\tau)^{2\beta-2}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{2y}{y-\tau}s\right)^{2\beta-2}ds$$

$$=\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}(2y)^{1-2\beta}(y-\tau)^{2\beta-2}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 2-2\beta,\ 2-2\beta, \frac{2y}{y-\tau}\right)$$

$$=\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}(2y)^{1-2\beta}(y-\tau)^{2\beta-2}\left(1-\frac{2y}{y-\tau}\right)^{\beta-1}$$

$$=\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}(2y)^{1-2\beta}(\tau^2-y^2)^{\beta-1}.$$

故

$$I_2=\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}(2y)^{1-2\beta}\int_y^\infty f(x+\tau)(\tau^2-y^2)^{\beta-1}d\tau.$$

因此，Volterra形式的解之一，可用Poisson形式解表为

$$y^{1-2\beta}\int_y^\infty f(x+t)(t^2-y^2)^{\beta-1}dt$$

$$=\frac{\Gamma(2-2\beta)2^{2\beta-1}}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_{-y}^y(y^2-t^2)^{-\beta}$$

$$\times\int_t^\infty f(x+\tau)(t-\tau)^{2\beta-2}d\tau dt$$

$$-\frac{\Gamma(2\beta-1)\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}y^{1-2\beta}\int_{-y}^y(y^2-t^2)^{\beta-1}f(t)dt.$$

同样，对另一Volterra解，也有类似的表达式。

## §7. 奇性Cauchy问题的初步探讨

在混合型方程的研究中，需要讨论奇性 Cauchy 问题. 现在以引言中的方程(0.11)为例，应用Riemann公式讨论奇性Cauchy问题

$$
\begin{cases}
u_{\xi\eta}-\dfrac{m-2p}{2(2+m)(\xi-\eta)}u_{\xi}+\dfrac{m+2p}{2(2+m)(\xi-\eta)}u_{\eta}=0, \\
u(\xi,\ \xi)=\tau(\xi), \\
\lim\limits_{\xi-\eta\to 0}\left(\dfrac{(2+m)(\xi-\eta)}{4}\right)^{\frac{m}{2+m}}(u_{\xi}-u_{\eta})=v(\xi).
\end{cases} \tag{1.63}
$$

由于EPD方程以 $\xi=\eta$ 为奇线（图 4），所以应该先让数据

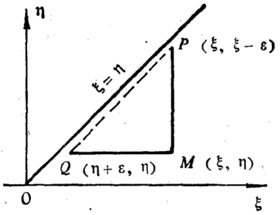



图 4

给在直线 $\xi-\eta=\varepsilon$ 上，然后再令 $\varepsilon\to 0$．将Riemann 函数的两定点$(\xi,\ \eta)$和$(\xi_0,\ \eta_0)$的记号互换，在区域 $\triangle MPQ$ 上应用Riemann公式得到

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\ \eta)=&\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q] \\
&+\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\left\{\left[\frac{m}{(2+m)(\xi_0-\eta_0)}v(\xi_0,\ \eta_0;\xi,\ \eta)\right.\right. \\
&\left.\left.-\frac{1}{2}v_{\xi_0}(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)+\frac{1}{2}v_{\eta_0}(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\right]\right|_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}
\end{aligned}
$$

$$\times u(\xi_0, \xi_0-\varepsilon)$$

$$\left.+\frac{1}{2}v(\xi_0, \xi_0-\varepsilon; \xi, \eta)(u_{\xi_0}-u_{\eta_0})_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}\right\}d\xi_0. \tag{1.64}$$

下面计算（1.64）。首先，在R-函数的下列表达式中

$$v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{4+m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{4+m-2p}{2(2+m)}\right)}$$

$$\times\frac{(\xi_0-\eta_0)^{\frac{m}{2+m}}}{(\xi_0-\eta)^{\frac{m-2p}{2(2+m)}}(\xi-\eta_0)^{\frac{m+2p}{2(2+m)}}}$$

$$\times F(\beta,\beta',\beta+\beta',1-\sigma)+\frac{\Gamma\left(-\frac{2}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p}{2(2+m)}\right)}$$

$$\times\frac{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)^{\frac{2}{2+m}}}{(\xi_0-\eta)^{\frac{4+m-2p}{2(2+m)}}(\xi-\eta_0)^{\frac{4+m+2p}{2(2+m)}}}$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ 1-\sigma),$$

$$1-\sigma=\frac{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}{(\xi_0-\eta)(\xi-\eta_0)}.$$

如记$F$（$\beta$，$\beta'$，$\beta+\beta$，$1-\sigma$）的系数为$v_1$，$F(1-\beta,1-\beta',2-\beta-\beta',\ 1-\sigma)$的系数为$v_2$，则在$\xi_0-\eta_0=0$附近Riemann函数有估计式

$$v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)=v_1[1+0(\xi_0-\eta_0)]+v_2[1+0(\xi_0-\eta_0)]. \tag{1.65}$$

对Riemann函数微商得

$$
\begin{aligned}
&v_{\xi_0}(\xi_0,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta)\\
&=v_1\Big\{\Big[\frac{m}{2+m}(\xi_0-\eta_0)^{-1}-\frac{m-2p}{2(2+m)}(\xi_0-\eta)^{-1}\Big]\\
&\quad\times F(\beta,\ \beta',\ \beta+\beta',\ 1-\sigma)\\
&\quad+\Big[\frac{\xi-\eta}{(\xi_0-\eta)(\xi-\eta_0)}-\frac{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}{(\xi_0-\eta)^2(\xi-\eta_0)}\Big]\\
&\quad\times F'(\beta,\ \beta',\ \beta+\beta',\ 1-\sigma)\Big\}\\
&\quad+v_2\Big\{\Big[\frac{1}{\xi_0-\eta_0}-\frac{4+m-2p}{2(2+m)(\xi_0-\eta)}\Big]\\
&\quad\times F(1-\beta,\ 1-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ 1-\sigma)\\
&\quad+\Big[\frac{\xi-\eta}{(\xi_0-\eta)(\xi-\eta_0)}-\frac{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}{(\xi_0-\eta)^2(\xi-\eta_0)}\Big]\\
&\quad\times F'(1-\beta,\ 1-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ 1-\sigma)\Big\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_{\eta_0}(\xi_0,\ \eta_0,\ \xi,\ \eta)\\
&=v_1\Big\{\Big[-\frac{m}{2+m}(\xi_0-\eta_0)^{-1}+\frac{m+2p}{2(2+m)}(\xi-\eta_0)^{-1}\Big]\\
&\quad\times F(\beta,\ \beta',\ \beta+\beta',\ 1-\sigma)\Big\}\\
&\quad+v_2\Big\{\Big[-\frac{1}{\xi_0-\eta_0}+\frac{4+m+2p}{2(2+m)(\xi-\eta_0)}\Big]\\
&\quad\times F'(1-\beta,\ 1-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ 1-\sigma)\Big\}.
\end{aligned}
$$

因此，

$$\frac{1}{2}(v_{\xi_0}-v_{\eta_0})=\frac{m}{(2+m)(\xi_0-\eta_0)}v_1F(\beta,\beta',\beta+\beta',1-\sigma)$$

$$+\frac{v_2}{\xi_0-\eta_0}F(1-\beta,1-\beta',2-\beta-\beta',1-\sigma)$$

$$+0[(\xi_0-\eta_0)^{\frac{m}{2+m}}]+0(\xi_0-\eta_0).$$

故

$$\frac{mv(\xi_0,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta)}{(2+m)(\xi_0-\eta_0)}-\frac{1}{2}[v_{\xi_0}(\xi_0,\eta_0;\ \xi,\ \eta)$$

$$-v_{\eta_0}(\xi_0,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta)]$$

$$=\left(\frac{m}{2+m}-1\right)\frac{v_2}{\xi_0-\eta_0}F(1-\beta,\ 1-\beta',2-\beta-\beta',\ 1-\sigma)$$

$$+\ 0\ [(\xi_0-\eta_0)^{\frac{m}{2+m}}]+0(\xi_0-\eta_0)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p}{2(2+m)}\right)}(\xi-\eta)^{\frac{2}{2+m}}$$

$$\times(\xi_0-\eta)^{-\frac{4+m-2p}{2(2+m)}}(\xi-\eta_0)^{-\frac{4+m+2p}{2(2+m)}}$$

$$+\ 0\ [(\xi_0-\eta_0)^{\frac{m}{2+m}}]+0\ (\xi_0-\eta_0). \qquad (1.66)$$

将（1.65）和（1.66）代入（1.64）的右端，再令 $\varepsilon\to 0$，取极限得

$$u(\xi,\ \eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p}{2(2+m)}\right)}(\xi-\eta)^{\frac{2}{2+m}}$$

$$\times \int_{\eta}^{\xi} \tau(t)\ (\xi - t)^{-\frac{4+m+2p}{2(2+m)}} (t-\eta)^{-\frac{4+m+2p}{2(2+m)}} dt$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2+m}\right)^{\frac{m}{2+m}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{4+m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{4+m-2p}{2(2+m)}\right)}$$

$$\times \int_{\eta}^{\xi} \nu(t)(\xi - t)^{-\frac{m+2p}{2(2+m)}} (t-\eta)^{-\frac{m-2p}{2(2+m)}} dt.$$

或者回到原来的变量$x$，$y$而得

$$u(x,\ y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p}{2(2+m)}\right)}$$

$$\times \int_0^1 \tau\left(x + \frac{2m}{2+m} y^{\frac{2+m}{2}}\right)$$

$$\times (1-2t)t^{-\frac{4+m+2p}{2(2+m)}} (1-t)^{-\frac{4+m-2p}{2(2+m)}} dt$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{4+m}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{4+m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{4+m-2p}{2(2+m)}\right)} y \int_0^1 \nu\left(x + \frac{m}{2+m}\right.$$

$$\left.\times y^{\frac{2+m}{2}}\right)(1-2t)t^{-\frac{m+2p}{2(2+m)}} (1-t)^{-\frac{m-2p}{2(2+m)}} dt, \qquad (1.67)$$

我们也可以用Poisson表达式解问题（1.63），在表达式

$$u(\xi, \eta) = \int_0^1 \psi[\xi(1-t) + \eta t] t^{-\frac{4+m-2p}{2(2+m)}}$$

$$\times(1-t)^{-\frac{4+m-2p}{2(2+m)}}dt$$

$$+(\xi-\eta)^{\frac{2}{2+m}}\int_0^1\varphi[\xi(1-t)+\eta t]t^{-\frac{m+2p}{2(2+m)}}$$

$$\times(1-t)^{-\frac{m-2p}{2(2+m)}}dt. \tag{1.22)'$$

中，令$\xi-\eta\to0$得

$$\tau(\xi)=\psi(\xi)\int_0^1 t^{-\frac{4+m+2p}{2(2+m)}}(1-t)^{-\frac{4+m-2p}{2(2+m)}}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p}{2(2+m)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2+m}\right)}\psi(\xi).$$

即

$$\psi(\xi)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2+m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{m-2p}{2(2+m)}\right)}\tau(\xi).$$

(1.22)′对$\xi$和$\eta$分别求导，再相减并乘以$\left(\frac{\xi-\eta}{\frac{4}{2+m}}\right)^{\frac{m}{2+m}}$，然后

让$\xi-\eta\to0$，得

$$v(\xi)=\left(\frac{2+m}{4}\right)^{\frac{m}{2+m}}\varphi(\xi)$$

$$\times\int_0^1 t^{-\frac{m+2p}{2(2+m)}}(1-t)^{-\frac{m-2p}{2(2+m)}}dt$$

$$=\left(\frac{2+m}{4}\right)^{\frac{m}{2+m}}\frac{\Gamma\left(\frac{4+m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{4+m-2p}{2(2+m)}\right)}{\Gamma\left(\frac{4+m}{2+m}\right)},$$

即

$$\varphi(\xi)=\frac{\Gamma\left(\frac{4+m}{2+m}\right)}{\left(\frac{2+m}{4}\right)^{\frac{m}{2+m}}\Gamma\left(\frac{4+m+2p}{2(2+m)}\right)\Gamma\left(\frac{4+m-2p}{2(2+m)}\right)}\cdot v(\xi).$$

代回去，再回到变量$x$，$y$就是（1.67）．以上过程实际上等于验证（1.51)满足奇性Cauchy条件．同时也看出奇性Cauchy问题用Poisson表达式来解更为方便．

讨论1　问题（1.63）中第二个条件提得相当奇特，如果按照一般情况应提出下列问题

$$\begin{cases} u_{\xi\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}u_\xi+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0,\ 0<\begin{matrix}\beta\\ \beta'\end{matrix}<1,\ \beta+\beta'\neq 1. \\ u(\xi,\ \xi)=\tau(\xi),\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\xi=\eta}=v(\xi). \end{cases}\tag{1.68}$$

我们看会导致什么结果？

仿照前面对问题（1.63）的解法，先让数给在$\xi-\eta=\varepsilon$上，将Riemann函数的估计式

$$\frac{(\beta+\beta')v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\xi_0-\eta_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\xi_0}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\eta_0}\right)$$

$$=\frac{(\beta+\beta'-1)\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}(\xi_0-\eta)^{\beta-1}(\xi-\eta_0)^{\beta'-1}$$

$$\times(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}[1+0(\xi_0-\eta_0)]+0[(\xi_0-\eta_0)^{\beta+\beta'}].$$

$$v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}(\xi_0-\eta)^{-\beta'}$$

$$\times(\xi-\eta_0)^{-\beta}(\xi_0-\eta_0)^{\beta+\beta'}+0(\xi_0-\eta_0),$$

代入Riemann公式

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}[(uv)_P+(uv)_Q]+\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\left\{\frac{(\beta+\beta')v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\xi_0-\eta_0}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\xi_0}-\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\eta_0}\right]\right\}_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}$$

$$\times u(\xi_0,\ \xi_0-\varepsilon)d\xi_0$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\left[v(\xi_0,\ \eta_0;\xi,\ \eta)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_0}-\frac{\partial u}{\partial\eta_0}\right)\right]_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}d\xi_0$$

$$=\frac{1}{2}[\tau(\xi)v_P+\tau(\eta+\varepsilon)v_Q]+\int_{\eta-\varepsilon}^{\xi}\left\{\frac{(\beta+\beta')v}{\xi_0-\eta_0}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi_0}-\frac{\partial v}{\partial\eta_0}\right)\right\}_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}\tau(\xi_0)d\xi_0$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\eta-\varepsilon}^{\xi}v\Big|_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}v(\xi_0)d\xi_0,$$

再让 $\varepsilon\to0$ 取极限，如果 $v(\xi)$ 是有界函数，则上式右端最后一个积分的极限为零. 因此

$$u(\xi,\ \eta)=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_{\eta}^{\xi}\tau(\xi_0)(\xi_0-\eta)^{\beta-1}(\xi-\eta_0)^{\beta'-1}d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\int_0^1\tau[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'-1}d\tau.\tag{1.69}$$

这个事实表明问题（1.68）不适定.

将（1.69）分别对 $\xi$ 和 $\eta$ 进行微商，得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\int_0^1 \tau'[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'-1}d\tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\int_1^0 \tau'[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'}d\tau,$$

从而推出解满足的条件是

$$\begin{aligned}\lim_{\xi-\eta\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)&=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\tau'(\xi)\\ &\quad\times\left\{\int_0^1(1-\tau)^{\beta}\tau^{\beta'-1}d\tau-\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'}d\tau\right\}\\ &=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\tau'(\xi)\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta')-\Gamma(\beta)\Gamma(\beta'+1)}{\Gamma(\beta+\beta'+1)}\right\}\\ &=\frac{\beta-\beta'}{\beta+\beta'}\tau'(\xi).\end{aligned}\tag{1.70}$$

这就是说，当 $0<\frac{\beta}{\beta'}<1$ 时，EPD方程的奇性 Cauchy 问题，如果 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$，$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ 是连续到边界（即所谓的正则解），那么只须给定 $u(\xi,\xi)=\tau(\xi)$ 的值就够了. 为什么会有这种现象呢？我们从方程来看，由于 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$，$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ 连续有界，从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$ 在 $\xi-\eta=0$ 附近不可能有高于一阶的奇性，即必有

$$\lim_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

因此由方程即推导出在 $\xi=\eta$ 时的关系式

$$-\beta' u_\xi+\beta u_\eta=0$$

(1.70) 式反映的正是这个事实，即当 $\xi=\eta$ 时，给定 $u(\xi,\xi)=\tau(\xi)$ 后，当然 $u_\xi=\tau'(\xi)$ 的值定了，而 $u_\eta$ 的值也由上式定出，这和一般非奇性方程不同，这里奇线就好象特征线一样。

长期以来，人们讨论EPD方程的奇性 Cauchy 问题，往往只给出 $u(\xi,\xi)=\tau(\xi)$ 这样一个条件，但是又发现当 $\beta+\beta'<0$ 时解是不唯一的。这似乎是一个难题。事实上，由 Poisson 表达式我们看出，给一个条件 $u(\xi,\xi)=\tau(\xi)$ 只是利用了表达式中的一项。当 $\beta+\beta'<0$ 时，$1-\beta-\beta'>1$，$(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$ 的微商当 $\xi-\eta\to 0$ 时趋于零。所以对任意的 $\varphi\in C^2$，

$$(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-\tau)+\eta\tau]\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta'}d\tau. \tag{1.71}$$

均满足初始数据的解，所以解不唯一。

由问题 (1.63) 的启示看出，当 $\beta+\beta'<1$ 时，应提修改的奇性Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{\xi\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}u_\xi+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0, \quad \beta+\beta'<1, \\ u(\xi,\xi)=\tau(\xi), \\ \lim\limits_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}(u_\xi-u_\eta)=v(\xi). \end{cases} \tag{1.72}$$

当 $0<\frac{\beta}{\beta'}<1$ 时，它的解的表达式为

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta)=&\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\int_0^1\tau[\xi(1-\tau)+\eta\tau] \\ &\times(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta'-1}d\tau \\ &+\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'} \end{aligned}$$

$$\times\int_0^1 v[\xi(1-\tau)+\eta\tau](1-\tau)^{-\beta}\tau^{-\beta'}d\tau.$$

至此问题还未结束，当$\beta+\beta'>1$时，(1.71) 有$\beta+\beta'-1$阶奇性，问题 (1.72) 又不适定。奇性Cauchy问题应如何提法，须得将Poisson表达式开拓到$0<\frac{\beta}{\beta'}<1$外去时，方能讨论。

讨论 2　当$\beta$和$\beta'$中有一个的值超出(0.1)之外时，Riemann公式 (1.64) 右端的两个积分中，总有一个要发散。但是有些问题的讨论就要涉及到$\beta$和$\beta'$的值相当大的情形，例如引言中的重特征方程的离散现象。下面的问题是 (1.63) 的一个极限情形，以$p=-\frac{m}{2}$为例试探一下利用Riemann公式处理这种情形的可能性。

此时Riemann函数为

$$v(\xi_0,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta)=\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{\xi_0-\eta}\right)^{\frac{m}{2+m}},$$

$$\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\xi_0}=\frac{m}{2+m}\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{\xi_0-\eta}\right)^{\frac{m}{2+m}}\times[(\xi_0-\eta_0)^{-1}-(\xi_0-\eta)^{-1}],$$

$$\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\eta_0}=-\frac{m}{2+m}\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{\xi_0-\eta}\right)^{\frac{m}{2+m}}(\xi_0-\eta_0)^{-1}.$$

于是

$$\frac{mv(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{(2+m)(\xi_0-\eta_0)}-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\xi_0}-\frac{\partial v(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)}{\partial\eta_0}\right]$$

$$=\frac{m}{2(2+m)}\left(\frac{\xi_0-\eta_0}{\xi_0-\eta}\right)^{\frac{m}{2+m}}(\xi_0-\eta)^{-1}.$$

代入Riemann公式得

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}u(\eta+\varepsilon,\eta)+\frac{1}{2}u(\xi,\xi-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\xi-\eta}\right)^{\frac{m}{2+m}}$$

$$+\frac{m\varepsilon^{\frac{m}{2+m}}}{2(2+m)}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\frac{u(\xi_0,\ \xi_0-\varepsilon)}{(\xi_0-\eta)^{\frac{2+2m}{2+m}}}d\xi_0$$

$$+\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\frac{\left[(\xi_0-\eta_0)^{\frac{m}{2+m}}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_0}-\frac{\partial u}{\partial\eta_0}\right)\right]_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}}{(\xi_0-\eta)^{\frac{m}{2+m}}}d\xi_0$$

$$=\frac{1}{2}u(\eta+\varepsilon,\eta)+\frac{1}{2}u(\xi,\xi-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\xi-\eta}\right)^{\frac{m}{2+m}}$$

$$+\frac{m\varepsilon^{\frac{m}{2+m}}}{2(2+m)}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\frac{u(\xi_0,\xi_0-\varepsilon)-u(\eta,\eta-\varepsilon)}{(\xi_0-\eta)^{\frac{m}{2+m}}(\xi_0-\eta)}d\xi_0$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\frac{\left[(\xi_0-\eta_0)^{\frac{m}{2+m}}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_0}-\frac{\partial u}{\partial\eta_0}\right)\right]_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}}{(\xi_0-\eta)^{\frac{m}{2+m}}}d\xi_0$$

$$+\frac{m\varepsilon^{\frac{m}{2+m}}}{2(2+m)}u(\eta,\ \eta-\varepsilon)\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\frac{d\xi_0}{(\xi_0-\eta)^{\frac{2+2m}{2+m}}}$$

$$=\frac{1}{2}[u(\eta+\varepsilon,\eta)+u(\eta,\ \eta-\varepsilon)]$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\xi-\eta}\right)^{\frac{m}{2+m}}[u(\xi,\xi-\varepsilon)-u(\eta,\eta-\varepsilon)]$$

$$+\frac{m\varepsilon^{\frac{m}{2+m}}}{2(2+m)}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\frac{u(\xi_0,\xi_0-\varepsilon)-u(\eta,\eta-\varepsilon)}{(\xi_0-\eta)^{\frac{m}{2+m}}(\xi_0-\eta)}d\xi_0$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\eta+\varepsilon}^{\xi}\frac{\left\{(\xi_0-\eta)^{\frac{m}{2+m}}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_0}-\frac{\partial u}{\partial\eta_0}\right)\right\}_{\xi_0-\eta_0=\varepsilon}}{(\xi_0-\eta)^{\frac{m}{2+m}}}d\xi_0.$$

让$\varepsilon\to 0$取极限得

$$u(\xi,\ \eta)=\tau(\eta)+\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi}\frac{v(\xi_0)}{(\xi_0-\eta)^{\frac{m}{2+m}}}d\xi_0$$

$$=\tau(\eta)+\frac{(\xi-\eta)^{\frac{2}{2+m}}}{2}\int_0^1 v[\xi(1-\tau)+\eta\tau]$$

$$\times(1-\tau)^{-\frac{m}{2+m}}d\tau.$$

由此可见，处理技巧性较强。

此例还表明，对$E(\beta,\ \beta')$而言，当$\beta$或$\beta'$之一为零，另一为任意值时，奇性 Cauchy 问题仍是可解的。显然它的通解不能由$0<\frac{\beta}{\beta'}<1$时的$E(\beta,\ \beta')$的通解得到，也不能利用 Poisson 公式直接求出。

# 第二章　双曲型EPD方程的定解问题

本章我们介绍双曲型EPD方程的各类定解问题，其中包括：奇性 Cauchy 问题，奇性边值问题，奇性混合问题等定解问题。我们从解的开拓开始，讨论了各种奇性 Cauchy 问题的提法，引入Hadamard 函数，从特殊到一般，介绍了 Hadamard 函数的作法，这在过去的文献中是没有发现的。

## §1. 解的开拓

在前一章中，我们得到了方程$E(\beta,\ \beta')$的两个分别含任意函数$\psi$，$\varphi$的解

$$\int_0^1 \psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1}(1-z)^{\beta-1}dz, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} (\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz, \\ \qquad \text{当}\ \beta+\beta'\neq 1, \\ \int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}\ln(\xi-\eta)z(1-z)dz, \\ \qquad \text{当}\ \beta+\beta'=1. \end{cases} \tag{2.2}$$

并且还证明了在一定意义下，它们的组合可以认为是方程的“通解”。但是，当$\beta$，$\beta'$中之一小于或者等于零时，(2.1) 无意义。当$\beta$，$\beta'$中之一大于或等于1时，(2.2) 无意义。因此，为

了能在一般情况下讨论方程的定解问题，需要对任意的β，β′建立$E(\beta,\ \beta')$的解的表达式。

一些作者应用Hadamard的发散积分的有限部分或 Riemann-Liouviue 积分的解析开拓概念，将（2.1），（2.2）进行开拓。但这些结果只是对于β，β′的某些特殊值，没有包括所有可能的情形。

下面，我们利用EPD方程的递推关系式将（2.1），（2.2）开拓至β，β′为任意实数的情形。

$$\frac{\partial^{m+n}u(\beta,\ \beta')}{\partial\xi^m\partial\eta^n}=u\,(\beta+m,\beta'+n),\beta,\beta'\neq 0,-1,-2,\cdots. \tag{2.3}$$

$$(\xi-\eta)^{1+m+n-\beta-\beta'}\frac{\partial^{n+m}}{\partial\xi^n\partial\eta^m}\left[\frac{u\,(\beta,\ \beta')}{(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}}\right]$$
$$=u\,(\beta-m,\ \beta'-n),\ \ \beta,\ \beta'\neq 1,2,\cdots. \tag{2.4}$$

**1.我们首先求出β，β′有一为零或1时方程的解的表达式。**

例如$\beta'=0$而$\beta<1$时，方程为

$$u_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0\,.$$

对ξ积分一次，即得

$$u_\eta=\varphi(\eta)(\xi-\eta)^{-\beta},$$

从而，

$$u=u(\beta,\ 0)=\int_\eta^\xi\varphi(t)(\xi-t)^{-\beta}dt+\psi(\xi)$$

$$=(\xi-\eta)^{1-\beta}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta}dz+\psi(\xi), \tag{2.5}$$

其中φ，ψ是任意函数。类似地，方程$E(0,\ \beta')(\beta'<1)$有解

$$u(0,\beta')=(\xi-\eta)^{1-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta'}dz$$
$$+\psi(\eta). \qquad (2.6)$$

利用公式

$$u(\beta,\ \beta')=(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}u(1-\beta',\ 1-\beta),$$

又可求出$E(1,\ \beta')$和$E(\beta,\ 1)$的解分别为

$$u(1,\beta')=(\xi-\eta)^{-\beta'}u(1-\beta',\ 0)$$
$$=\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1}dz+(\xi-\eta)^{-\beta'}\varphi(\xi).$$

和 (2.7)

$$u(\beta,1)=(\xi-\eta)^{-\beta}u(0,\ 1-\beta)$$
$$=\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta-1}dz+(\xi-\eta)^{-\beta}\varphi(\eta). \qquad (2.8)$$

(2.7) 对$\beta'>0$，(2.8) 对$\beta>0$均有意义。

有时，为了形式统一起见，可将任意函数$\psi$，$\varphi$写为积分形式，

$$\psi(\xi)=\beta\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta-1}dz$$
$$-(\xi-\eta)\int_0^1\psi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta}dz,\ \beta>0.$$

因此，

$$u(\beta,0)=(\xi-\eta)^{1-\beta}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta}dz$$
$$+\beta\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta-1}dz$$
$$+(\xi-\eta)\int_0^1\psi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta}dz,\ 0<\beta<1.$$

类似地有 (2.5)′

$$u(0,\beta')=(\xi-\eta)^{1-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta'}dz$$

$$+\beta'\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1}dz$$

$$-(\xi-\eta)\int_0^1\psi'[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'}dz,\quad 0<\beta'<1, \tag{2.6}'$$

$$u(1,\beta')=\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1}dz$$

$$+(1-\beta')(\xi-\eta)^{-\beta'}$$

$$\times\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta'}dz+(\xi-\eta)^{1-\beta'}$$

$$\times\int_0^1\psi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{1-\beta'}dz,\quad 0<\beta'<1, \tag{2.7}'$$

和

$$u(\beta,1)=\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta-1}dz$$

$$+(1-\beta)(\xi-\eta)^{-\beta}$$

$$\times\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta}dz+(\xi-\eta)^{1-\beta}$$

$$\times\int_0^1\varphi'[\xi(1-z)+\eta z]z^{1-\beta}dz,\quad 0<\beta<1. \tag{2.8}'$$

当 $\beta=\beta'=1$ 时，显然可由弦振动方程的 $D'$ Alembert 解导出 $E(1,1)$ 的解为

$$u(1,1)=(\xi-\eta)^{-1}u(0,0)=(\xi-\eta)^{-1}[\psi(\xi)+\varphi(\eta)]$$

$$=(\xi-\eta)^{-1}\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]dz$$

$$+\int_0^1 \psi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)dz$$

$$+(\xi-\eta)^{-1}\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\xi z]dz$$

$$-\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z]zdz. \tag{2.9}$$

$E(1,\ 1)$的解有时也写为另一种形式

$$u(1,\ 1)=\int_0^1 \psi_1[\xi(1-z)+\eta z]dz$$
$$+(\xi-\eta)^{-1}[\varphi(\xi)+\varphi(\eta)].$$

不难看出，这二者是等价的.

要将$\beta<1$时$E(\beta,\ 0)$的解（2.5)推广至$\beta>1$的情形，可以这样应用公式（2.3）：

设$\beta=m+\beta_1$，其中$m$是正整数，$0<\beta_1<1$，则$E(m+\beta_1,\ 0)$有解

$$\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}\left\{(\xi-\eta)^{1-\beta_1}\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}dz\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^m C_m^k\frac{\partial^k(\xi-\eta)^{1-\beta_1}}{\partial\xi^k}\int_0^1 \varphi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]$$
$$\times z^{-\beta_1}(1-z)^{m-k}dz$$

$$=\sum_{k=0}^m\frac{m!(1-\beta_1)\cdots(1-\beta_1-k+1)}{(m-k)k!}(\xi-\eta)^{1-\beta_1-k}$$
$$\times\int_0^1 \varphi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)^{m-k}dz$$

$$=\sum_{k=0}^m\frac{(-1)^k m!(\beta_1-1)k}{(m-k)!k!}(\xi-\eta)^{1-\beta_1-k}$$

$$\times\int_0^1 \varphi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)^{m-k}dz.$$

因此，$E(m+\beta_1,\ 0)$的解是

$$u(m+\beta_1,0)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!\,(\beta_1-k)\,k}{(m-k)!\,k!}(\xi-\eta)^{1-\beta_1-k}$$

$$\times\int_0^1 \varphi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)^{m-k}dz+\psi(\xi).\tag{2.10}$$

特别，当$m=1$时，$E(1+\beta_1,\ 0)$有一解为

$$(1-\beta_1)(\xi-\eta)^{-\beta_1}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}dz$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta_1}\int_0^1\varphi'[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)dz.\tag{2.11}$$

注　解的开拓也可由分部积分得出。以（2.11）为例，首先注意

$$\frac{d}{dz}[z^{-\beta_1}(1-z)]=-z^{-\beta_1}-\beta_1 z^{-\beta_1-1}(1-z)$$

$$=(\beta_1-1)z^{-\beta_1}-\beta_1 z^{-\beta_1-1},$$

如果$0<\beta<1$，（因而$\beta_1=\beta-1<0$），（2.5）有意义，

$$\beta_1(\xi-\eta)^{1-\beta}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta}dz$$

$$=\beta_1(\xi-\eta)^{-\beta_1}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1-1}dz$$

$$=-(\xi-\eta)^{-\beta_1}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]\frac{d}{dz}[z^{-\beta_1}(1-z)]dz$$

$$-(1-\beta_1)(\xi-\eta)^{-\beta_1}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}dz$$

$$= -(\xi-\eta)^{-\beta_1}\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)\Big|_{z=0}^{z=1}$$

$$-(\xi-\eta)^{1-\beta_1}\int_0^1\varphi'[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)dz$$

$$-(1-\beta_1)(\xi-\eta)^{-\beta_1}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}dz.$$

由于积分出来的部分为零，所以和（2.11）式是一致的。这个事实说明，利用递推公式开拓解，和取发散积分的有限部分，或者进行解析延拓，本质上都是一回事。

类似地，对于$E(0, n+\beta_1')$，$(0<\beta_1'<1)$，有解

$$u(0, n+\beta_1') = \sum_{l=0}^{n}\frac{n!(\beta_1'-1)l}{(n-l)!\,l!}(\xi-\eta)^{1-\beta_1'-l}\int_0^1\varphi^{(n-l)}$$

$$\times[\xi(1-z)+\eta z]z^{n-l}(1-z)^{-\beta_1'}dz+\psi(\eta). \tag{2.12}$$

特别，$E(0, 1+\beta_1')$有解

$$-(1-\beta_1')(\xi-\eta)^{-\beta_1'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta_1'}dz$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta_1'}\int_0^1\varphi'[\xi(1-z)+\eta z]z(1-z)^{-\beta_1'}dz. \tag{2.13}$$

注（2.13）也可由（2.6）经由分部积分得出。先设$0<\beta'<1$，则$\beta_1'=\beta'-1<0$，因为

$$\frac{d}{dz}[(1-z)^{-\beta_1'}z]=(1-z)^{-\beta_1'}+\beta_1'(1-z)^{-\beta_1'-1}z$$

$$=(1-\beta_1')(1-z)^{-\beta_1'}+\beta_1'(1-z)^{-\beta_1'-1},$$

所以

$$\beta_1'(\xi-\eta)^{1-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta'}dz$$

$$= \beta_1'(\xi-\eta)^{-\beta_1'}\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta_1'}dz$$

$$= (\xi-\eta)^{-\beta_1'}\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]\frac{d}{dz}[(1-z)^{-\beta_1'}z]dz$$

$$-(1-\beta_1')(\xi-\eta)^{-\beta_1'}\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta_1'}dz$$

$$= (\xi-\eta)^{1-\beta_1'}\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta_1'}zdz$$

$$-(1-\beta_1')(\xi-\eta)^{-\beta_1'}\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{-\beta_1'}dz.$$

上式和（2.13）一致。

当$\beta_1\to 0$时，（2.11）趋于

$$\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]dz+(\xi-\eta)$$

$$\times\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)dz=\varphi(\xi).$$

这和另一解$\psi(\xi)$具有同样的形式，所以还要求另一独立的解。

将$\varphi(\xi)$写为

$$\varphi(\xi)=(1+\beta_1)\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta_1}dz$$

$$+(\xi-\eta)\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta_1+1}dz, \tag{2.14}$$

这是$E(1+\beta_1,\ 0)$的一个解，与（2.11）的线性组合也仍是解。（2.14）减去（2.11），并除以$\beta_1$，得到

$$\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z][(1-z)^{\beta_1}+(\xi-\eta)^{-\beta_1}z^{-\beta_1}]dz$$

$$+\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{\beta_1}\frac{1-(\xi-\eta)^{-\beta_1}z^{-\beta_1}(1-z)^{-\beta_1}}{\beta_1}dz$$

$$+(\xi-\eta)\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)^{1+\beta_1}$$

$$\frac{1-(\xi-\eta)^{-\beta_1}(1-z)^{-\beta_1}z^{-\beta_1}}{\beta_1}dz.$$

令$\beta_1\to 0$，上式取极限，则得$E(1,\ 0)$的一个解

$$2\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]dz+\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)$$

$$+\eta z]\ln(\xi-\eta)z(1-z)dz+(\xi-\eta)\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)$$

$$+\eta z](1-z)\ln(\xi-\eta)z(1-z)dz.$$

因此，方程$E(1,\ 0)$的一般解为

$$u(1,\ 0)=\psi(\xi)+2\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]dz$$

$$+\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]\ln(\xi-\eta)z(1-z)dz$$

$$+(\xi-\eta)\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)\ln(\xi-\eta)z(1-z)dz$$

$$=\psi(\xi)+\varphi(\xi)\ln(\xi-\eta)+z\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]dz$$

$$+\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]\ln z(1-z)dz+(\xi-\eta)$$

$$\times\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z](1-z)\ln z(1-z)dz. \qquad (2.15)$$

同样可导出$E(0,\ 1)$的一般解为

$$u(0,\ 1)=\psi(\eta)+\varphi(\eta)\ln(\xi-\eta)$$

$$+2\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]dz$$

$$+\int_0^1 \varphi[\xi(1-z)+\eta z]\ln z(1-z)dz-(\xi-\eta)$$

$$\times\int_0^1 \varphi'[\xi(1-z)+\eta z]z\ln z(1-z)dz. \quad (2.16)$$

对于任意的β、β′，可分为两种情形讨论：1，β，β′同号；和2，β，β′异号。

2.β，β′同号，又分为三种情况

（i） β，β′<0而β+β′≠－1，－2，…，此时，可设 $\beta=\beta_1-m$，$\beta'=\beta_1'-n$，$m$，$n=1$，2，3，…，$0<\beta_1<1$，$0<\beta_1'<1$而$\beta_1+\beta_1'\neq 1$。将递推式

$$u(\beta_1-m,\ \beta_1'-n)=(\xi-\eta)^{1+m+n-\beta_1-\beta_1'}$$

$$\times\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^n\partial\eta^m}[(\xi-\eta)^{\beta_1+\beta_1'-1}u(\beta_1,\ \beta_1')].$$

应用于$E(\beta，\beta_1')$的解

$$\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta_1'-1}(1-z)^{\beta_1-1}dz,$$

而得到

$$(\xi-\eta)^{1+m+n-\beta_1-\beta_1'}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\Big(\sum_{k=0}^{m}C_m^k(1-\beta_1-\beta_1')_k$$

$$\times(\xi-\eta)^{\beta_1+\beta_1'-1-k}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(m-k)}\cdot(1-z)^{\beta_1-1}z^{\beta_1'+m-k-1}dz\Big]$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}C_n^l\ C_m^k\ (-1)^l(1-\beta_1-\beta_1')_{k+l}(\xi-\eta))^{m+n-k-l}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(m+n-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta_1'+m-k-1}(1-z)^{\beta_1+n-l-1}dz. \quad (2.17)$$

(ii) 如 $\beta+\beta'=-1,-2,-3,\cdots$，此时可设 $\beta=\beta_1-m$，$\beta'=1-\beta_1-n$，$0<\beta_1<1$，$m$，$n=1,2,\cdots$，应用递推公式

$$u(\beta_1-m,\ 1-\beta_1-n)=(\xi-\eta)^{m+n}\frac{\partial^{n+m}}{\partial\xi^n\partial\eta^m}u(\beta_1,1-\beta_1),$$

于方程 $E(\beta_1,\ 1-\beta_1)$ 的解

$$\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)^{\beta_1-1}\ln(\xi-\eta)z(1-z)dz$$

而得到

$$(\xi-\eta)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m\partial\eta^n}\Big\{\ln(\xi-\eta)\int_0^1\psi[\xi(1-z)$$

$$+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)^{\beta_1-1}dz$$

$$+\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta_1}(1-z)^{\beta_1-1}\ln z(1-z)dz\Big\}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}C_n^lC_m^k(-1)^{l-1}(k+l-1))!(\xi-\eta)^{m+n-k-l}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(m+n-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m-\beta_1-k}(1-z)^{n+\beta_1-l-1}dz$$

$$-\sum_{k=1}^{m}C_m^k(k-1)!(\xi-\eta)^{m+n-k}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(m+n-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m-\beta_1-k}$$

$$\times(1-z)^{n+\beta_1-1}dz+(\xi+\eta)^{m+n}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(m+n)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m-\beta_1}$$

$$\times\ln z(1-z)(\xi-\eta)dz. \qquad (2.18)$$

上式加上

$$(\xi-\eta)^{m+n}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{m-\beta_1}(1-z)^{n+\beta_1-1}dz$$

(2.19)

就是方程$E(\beta_1-m,\ 1-\beta_1-n)$的一般解。

(*iii*) 如$0<\beta$，$\beta'$，此时可设 $\beta=\beta_1+m$，$\beta'=\beta_1'+n$，其中$0<\beta_1$，$\beta_1'\leqslant 1$，$m$，$n=0$，1，2，…，利用公式

$$u(\beta,\ \beta')=(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}u(1-\beta,\ 1-\beta'),$$

可以将此种情形转为(*i*)、(*ii*)，而得方程$E(\beta_1+m,\ \beta_1'+n)$的一般解如下：

当$\beta_1+\beta_1'\neq 1$时

$$u(\beta_1+m,\ \beta_1'+n)$$

$$=\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]\,z^{\beta_1'+n-1}(1-z)^{\beta_1+m-1}dz$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}C_n^lC_m^k(-1)^k(-1+\beta_1+\beta_1')_{k+l}(\xi-\eta)^{1-\beta_1-\beta_1'-k-l}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(m+n-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{n-\beta_1-l}(1-z)^{m-\beta_1'-k}dz. \tag{2.18}$$

而当 $\beta_1+\beta_1'=1$时，

$$u(\beta_1+m,\ \beta'+n)$$

$$=\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^{n-\beta_1}(1-z)^{m-\beta_1'-1}dz$$

$$+\int_0^1\psi^{(m+n)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{n-\beta_1}(1-z)^{m+\beta_1-1}$$

$$\times \ln(\xi-\eta) z(1-z) dz-\sum_{k=1}^{m} C_m^k(-1)^k(k-1)!\,(\xi-\eta)^{-k}$$

$$\times \int_0^1 \psi^{(m+n-k)}[\xi(1-z)+\eta z] z^{n-\beta_1}(1-z)^{m+\beta_1-k-1} dz$$

$$+\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} C_n^l C_m^k(-1)^{k-1}(k+l-1)!\,(\xi-\eta)^{-k-l}$$

$$\times \int_0^1 \psi^{(m+n-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z] z^{n-\beta_1-l}(1-z)^{m+\beta_1-k-1} dz. \tag{2.19)'$$

**3. β，β′异号**

我们只讨论 $-\infty<\beta<1$，$0\leqslant\beta'<\infty$的情形，其余情形完全类似。此时，$\beta$、$\beta'$可以写为$\beta=\beta_1-m$，$\beta'=\beta_1'+n$，其中$0\leqslant\beta$、$\beta'<1$，$m=0, 1, 2, \cdots$。又可以分为三种情形：

（$i$） $\beta_1$，$\beta_1'\neq 0$，$\beta_1+\beta_1'\neq 1$。仿照前面的结果，不难得到方程$E(\beta_1-m, \beta_1'+n)$的一般解为

$$u(\beta_1-m, \beta_1'+n)$$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k(1-n-\beta_1-\beta_1')_k(\xi-\eta)^{m-k}$$

$$\times \int_0^1 \varphi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z] z^{\beta_1'+n+m-k-1}(1-z)^{\beta_1-1} dz$$

$$+\sum_{l=0}^{n} C_n^l(\beta_1+\beta_1'-1-m)_l(\xi-\eta)^{1+n-\beta_1-\beta_1'-l}$$

$$\times \int_0^1 \psi^{(n-l)}[\xi(1-z)+\eta z] z^{m+n-\beta_1-l}(1-z)^{-\beta_1'} dz. \tag{2.20}$$

(*ii*) $\beta_1$或$\beta_1'=0$，但$\beta_1+\beta_1'\neq 0$。此时，$\beta=-m$，$\beta'=\beta_1'+n$或$\beta=\beta_1-m$，$\beta'=n$，由于完全类似，只须讨论前一种情况。和（2.2）式相仿，由$E(-m,\ \beta_1')$的解

$$(\xi-\eta)^{1+m-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]z^m(1-z)^{-\beta_1'}dz,$$

可得一般解

$$\sum_{l=0}^{n}C_n^l(\beta_1'-1-m)_l(\xi-\eta)^{1+m-\beta_1'-l}\int_0^1\varphi^{(n-l)}[\xi(1-z)+\eta z]$$

$$\times z^{m+n-l}(1-z)^{-\beta_1'}dz. \tag{2.21}$$

另一独立解则可应用公式

$$u(-m,\beta_1'+n)=(\xi-\eta)^{1+m+n-\beta_1'}\frac{\partial^m}{\partial\eta^m}$$

$$\times[(\xi-\eta)^{n-\beta_1'-1}u(0,\ \beta_1'+n)]$$

于方程$E(0,\ \beta'+n)$的解$\psi(\eta)$而得

$$\sum_{k=0}^{m}C_m^k(1-n-\beta_1')_k(\xi-\eta)^{m-k}\psi^{(m-k)}(\eta). \tag{2.22}$$

（2.21）和（2.22）的线性组合就是$E(-m,\ \beta_1'+n)$的一般解。

(*iii*) $\beta_1+\beta_1'=1$，即$\beta=\beta_1'-m$，$\beta'=1-\beta_1+n$，$(0<\beta_1\leqslant 1)$，此时，为了计算简便起见，不用递推公式，而仿照Darboux对$\beta+\beta'=1$的处理方法。利用（2.20）式取极限导出方程$E(\beta_1-m,\ 1-\beta_1+n)$的一般解。以下只讨论$m\geqslant n$的情形。（$m<n$的情形完全类似）。

先设$\beta'=\beta_1'+n=1-\beta_1+n+\varepsilon$，此时方程有如下的解

$$\frac{1}{\beta_1+\beta_1'-1}\left\{\sum_{k=0}^{m}C_m^k(1-n-\beta_1-\beta_1')_k(\xi-\eta)^{m-k}\right.$$

$$\times\int_0^1 \varphi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta_1'+n+m-k-1}(1-z)^{\beta_1-1}dz$$

$$-\sum_{l=0}^{n} C_n^l(\beta_1+\beta_1'-1-m)_l(\xi-\eta)^{m+1-\beta_1-\beta_1'-l}$$

$$\times\int_0^1 \psi^{(n-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m+n-\beta_1-l}(1-z)^{-\beta_1'}dz\Big\}$$

$$=\frac{g_1-g_2}{\beta_1+\beta_1'-1}. \tag{2.23}$$

当 $\varepsilon\to 0$，$\beta_1'\to 1-\beta_1$时，有

$$\lim_{\beta_1'\to 1-\beta_1} g_1=\lim_{\beta_1'\to 1-\beta_1}\sum_{k=0}^{m} C_m^k(1-n-\beta_1-\beta_1')_k(\xi-\eta)^{m-k}$$

$$\times\int_0^1 \psi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta_1'+n+m-k-1}(1-z)^{\beta_1-1}dz$$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}(\xi-\eta)^{m-k}$$

$$\times\int_0^1 \psi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m+n-\beta_1-k}(1-z)^{\beta_1-1}dz,$$

$$\lim_{\beta_1'\to 1-\beta_1} g_2=\sum_{l=0}^{n} C_n^l(-1)^l\frac{m!}{(m-l)!}(\xi-\eta)^{m-l}$$

$$\times\int_0^1 \psi^{(n-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m+n-\beta_1-l}(1-z)^{\beta_1-1}dz.$$

因此，(2.13) 是一未定式，其极限按L'Hopital法则确定．由

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial \beta_1'}\right|_{\beta_1'=1-\beta_1}=\sum_{k=n+1}^{m} C_m^k(-1)^n\cdot n!\,(k-n-1)!\,(\xi-\eta)^{m-k}$$

$$\times\int_0^1 \psi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m+n-\beta_1-k}(1-z)^{\beta_1-1}$$

$$\times\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n-i}+\ln z\right)dz,$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial\beta_1'}\right|_{\beta_1'=1-\beta_1}=\sum_{l=0}^{n}C_n^l(-1)^l\frac{m!}{(m-l)!}(\xi-\eta)^{m-l}\int_0^1\psi^{(m-l)}$$

$$\times[\xi(1-z)+\eta z]z^{m+n-\beta_1-l}(1-z)^{\beta_1-1}$$

$$\times\left(\sum_{i=0}^{l-1}\frac{1}{i-m}-\ln(\xi-\eta)(1-z)\right)dz,$$

我们不难得到$E(\beta_1-m,\ 1-\beta_1+n)$的一般解的表达式

$$u(\beta_1-m,\ 1-\beta_1+n)$$

$$=\sum_{l=0}^{n}C_n^l(-1)^l\frac{m!}{(m-l)!}(\xi-\eta)^{m-l}\int_0^1\varphi^{(n-l)}[\xi(1-z)+\eta z]$$

$$\times z^{m+n-\beta_1-k}(1-z)^{\beta_1-1}dz+\sum_{l=0}^{n}C_n^l(-1)^l\frac{m!}{(m-l)!}(\xi-\eta)^{m-l}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(m-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m+n-\beta_1-l}(1-z)\beta_1^{-1}$$

$$\times\ln(\xi-\eta)z(1-z)dz+\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^k\frac{m!}{(m-k)!}$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{n-i}-\frac{1}{m-i}\right)\right](\xi-\eta)^{m-k}\int_0^1\psi^{(m-k)}[\xi(1-z)$$

$$+\eta z]z^{m+n-\beta_1-k}(1-z)\beta_1^{-1}dz$$

$$+\sum_{k=n+1}^{m}C_m^k(-1)^k n!\,(k-n-1)!\,(\xi-\eta)^{m-k}$$

$$\cdot\int_0^1 \psi^{(m-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{m+n-\beta_1-k}(1-z)^{\beta_1-1}dz. \tag{2.24}$$

## §2. 奇性Cauchy问题

在得到了方程$E(\beta,\beta')$为任意实数的一般解后，就可以转入各种定解问题的讨论。为此，我们先简单地分析一下 EPD 方程的解在奇线附近的性质。

上节的结果表明，EPD 方程的一般解由两类解组成。一类解是在奇线$\xi-\eta=0$附近的正则解$u_1(\xi,\eta,\beta,\beta')$，如用记号$[a]$表示实数$a$的正整数部分，则有：

当$\beta+\beta'$不等于负整数，或$\beta$和$\beta'$都是负整数时，

$$\begin{aligned}&u(\xi,\eta,\beta,\beta')\\&=\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C_{[1-\beta]}^{k}C_{[1-\beta']}^{l}(-1)^{l}(1-\beta-\beta'-[1-\beta]\\&\quad-[1-\beta'])_{k+l}(\xi-\eta)^{[1-\beta]+[1-\beta']-k-l}\\&\quad\times\int_0^1\psi^{([1-\beta]+[1-\beta']-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]\\&\quad\times z^{\beta'+[1-\beta]+[1-\beta']-k-1}(1-z)^{\beta+[1-\beta]+[1-\beta']-l-1}dz.\end{aligned} \tag{2.25}$$

当$\beta+\beta'$是负整数，$\beta$，$\beta'$是不等于整数的负数时，

$$\begin{aligned}&u(\xi,\eta,\beta,\beta')\\&=\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C_{[1-\beta]}^{k}C_{[1-\beta']}^{l}(-1)^{l-1}(k+l-1)!\\&\quad\times(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'-k-l}\int_0^1\psi^{(1-\beta-\beta'-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]\end{aligned}$$

$$\times z^{-\beta-k}(1-z)^{-\beta'-1}dz-\sum_{k=1}^{[1-\beta]}C_{[1-\beta]}^{k}(k-1)!\,(\xi-1)^{1-\beta-\beta'-k}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(1-\beta-\beta'-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta-k}(1-z)^{-\beta'}dz$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\psi^{(1-\beta-\beta')}[\xi(1-z)+\eta z]$$

$$\times z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}\ln[(\xi-\eta)z(1-z)]dz. \qquad (2.25)'$$

当$\beta+\beta'$是负整数，而$\beta\leqslant 0$，$\beta'\geqslant 0$（$\beta\geqslant 0$，$\beta'\leqslant 0$ 的情形类似）时，

$$u(\xi,\eta,\beta,\beta')$$

$$=\sum_{k=[\beta']+1}^{[1-\beta]}C_{[1-\beta]}^{k}(-1)^{[\beta']}[\beta]!\,(k-[\beta']-1)!\,(\xi-\eta)^{[1-\beta]-k}$$

$$\times\int_0^1\psi^{([1-\beta]-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{[\beta']-\beta-k}(1-z)^{[\beta']-\beta}dz$$

$$+\sum_{k=1}^{[\beta']}C_{[\beta']}^{k}(-1)^{k}\frac{[1-\beta]!}{([1-\beta]-k)!}\left\{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{[1-\beta]-i}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{[\beta']+i}\right)\right\}(\xi-\eta)^{[1-\beta]-k}\int_0^1\psi^{([1-\beta]-k)}[\xi(1-z)+\eta z]$$

$$\times z^{[\beta']-\beta-k}(1-z)^{[\beta]-\beta'}dz$$

$$+\sum_{k=0}^{[\beta']}C_{[\beta']}^{k}(-1)^{k}\frac{[1-\beta]!}{([1-\beta]-k)!}(\xi-\eta)^{[1-\beta]-k}$$

$$\times\int_0^1\psi^{([1-\beta]-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{[\beta']-\beta-k}(1-z)^{[\beta']-\beta}$$

$$\times\ln[(\xi-\eta)z(1-z)]dz. \qquad (2.25)''$$

另一类是在奇线附近与$(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$同阶（当$\beta+\beta'=1$时与$\ln(\xi-\eta)$同阶）的解$u_2(\xi,\eta,\beta,\beta')$：

当$\beta+\beta'$不等于正整数，或$\beta$，$\beta'$都是正整数时，

$$
\begin{aligned}
&u_2(\xi,\eta,\beta,\beta')\\
&=\sum_{k=0}^{[\beta]}\sum_{l=0}^{[\beta']}C_{[\beta]}^{k}C_{[\beta']}^{l}(-1)^k(\beta+\beta'-1-[\beta]-[\beta'])_{k+l}\\
&\times(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'-k-l+[\beta]+[\beta']}\int_0^1\varphi^{([\beta]+[\beta']-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]\\
&\times z^{[\beta]+[\beta']-k-l}(1-z)^{[\beta]+[\beta']-\beta'-k}dz.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

当$\beta+\beta'$等于正整数时，但$\beta$，$\beta'$是正的非整数时，

$$
\begin{aligned}
&u_2(\xi,\eta,\beta,\beta')\\
&=\sum_{k=0}^{[\beta]}\sum_{l=0}^{[\beta']}C_{[\beta]}^{k}C_{[\beta']}^{l}(-1)^{k-1}(k+l-1)!(\xi-\eta)^{-k-l}\\
&\times\int_0^1\varphi^{(\beta+\beta'-1-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1-l}(1-z)^{\beta-1-k}dz\\
&+\sum_{k=1}^{[\beta]}C_{[\beta]}^{k}(-1)^{k-1}(k-1)!(\xi-\eta)^{k}\\
&\times\int_0^1\varphi^{(\beta+\beta'-1-k)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1}(1-z)^{\beta-1-k}dz\\
&+\int_0^1\varphi^{(\beta+\beta'-1)}[\xi(1-z)+\eta z]\\
&\times z^{\beta'-1}(1-z)^{\beta-1}\ln[(\xi-\eta)z(1-z)]dz.
\end{aligned}
\tag{2.26'}
$$

当$\beta+\beta'$等于整数，但$\beta\leqslant 0$，$\beta'\geqslant 0$（$\beta\geqslant 0$，$\beta'\leqslant 0$类似）时，

$$
\begin{aligned}
&u_2(\xi,\ \eta,\ \beta,\ \beta') \\
&= \sum_{l=[1-\beta]+1}^{[\beta']} C^{l}_{[\beta']}(-1)^{[1-\beta]}[1-\beta]!\,(l-[1-\beta]-1)! \\
&\times(\xi-\eta)^{[1-\beta]-l}\int_0^1 \varphi^{([\beta']-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{[\beta']-\beta-k} \\
&\times(1-z)^{[\beta']-\beta}dz+\sum_{l=1}^{[1-\beta]} C^{l}_{[\beta']}(-1)^{l}\frac{[1-\beta]!}{([1-\beta]-l)!} \\
&\times\left[\sum_{i=0}^{l-1}\left(\frac{1}{[1-\beta]-i}+\frac{1}{[\beta']-i}\right)\right](\xi-\eta)^{[1-\beta]-l} \\
&\times\int_0^1 \varphi^{([\beta']-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{[\beta']-\beta-k}(1-z)^{[\beta']-\beta}dz \\
&+\sum_{l=0}^{[1-\beta]} C^{l}_{[\beta']}(-1)^{l}\frac{[1-\beta]!}{([1-\beta]-l)!}(\xi-\eta)^{[1-\beta]-l} \\
&\times\int_0^1 \varphi^{([\beta']-l)}[\xi(1-z)+\eta z] \\
&\times z^{[\beta']-[\beta]-k}(1-z)^{[\beta']-\beta}\ln[(\xi-\eta)z(1-z)]dz. \quad (2.26)''
\end{aligned}
$$

因此，EPD方程的解在奇线附近的性质完全具有Fuchs型方程的特征。

其次假设 $u$ 是EPD方程的正则解，$\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$，$\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$连续到奇线 $\xi-\eta=0$ 上，则应有

$$
\lim_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.
$$

因此，由方程就得到在奇线 $\xi-\eta=0$ 上的一个关系式

$$\lim_{\xi-\eta\to 0}\left(\beta'\frac{\partial u}{\partial\xi}-\beta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0. \tag{2.27}$$

此事可对正则解直接进行验证。事实上，对（2.25）式微商，不难得到，

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=\eta}=(-1)^{[1-\beta']}\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])}\psi'(\xi)$$

$$\times\int_0^1 z^{\beta'+[1-\beta']-1}(1-z)^{\beta+[1-\beta]}dz$$

$$+(-1)^{[1-\beta']}\frac{\Gamma(-\beta-\beta')[1-\beta]}{\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])}$$

$$\times\psi'(\xi)\int_0^1 z^{\beta'+[1-\beta']}(1-z)^{\beta+[1-\beta]-1}dz$$

$$-(-1)^{[1-\beta']}\frac{\Gamma(-\beta-\beta')[1-\beta']}{\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])}\psi'(\xi)$$

$$\times\int_0^1 z^{\beta'+[1-\beta']-1}(1-z)^{\beta+[1-\beta]}dz$$

$$=\{(\beta+\beta')(\beta+[1-\beta])-([1-\beta](\beta'+[1-\beta'])$$
$$+[1-\beta'](\beta+[1-\beta])\}\{(-1)^{[1-\beta']-1}\Gamma(-\beta-\beta')$$
$$\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])\}/\{\Gamma(1-\beta-\beta'$$
$$-[1-\beta]-[1-\beta'])\Gamma(\beta+\beta'+1+[1-\beta]+[1-\beta'])\}$$
$$\times\psi'(\xi)$$

$$=(-1)^{[1-\beta']-1}\times\{\beta\Gamma(-\beta-\beta')\Gamma(\beta+[1-\beta])$$
$$\Gamma(\beta'+[1-\beta'])\}/\{\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])$$
$$\Gamma(\beta+\beta'+1+[1-\beta]+[1-\beta'])\}$$
$$\times\psi'(\xi).$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right|_{\xi=\eta}=(-1)^{[1-\beta']}\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])}\psi'(\xi)$$

$$\times\int_0^1 z^{\beta'+[1-\beta']}(1-z)^{\beta+[1-\beta]-1}dz$$

$$-(-1)^{[1-\beta']}\frac{\Gamma(-\beta-\beta')[1-\beta']}{\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])}$$

$$\times\psi'(\xi)\int_0^1 z^{\beta'+[1-\beta]}(1-z)^{\beta+[1-\beta]}dz$$

$$+(-1)^{[1-\beta']}\frac{\Gamma(-\beta-\beta')[1-\beta']}{\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])}\cdot\psi'(\xi)$$

$$\times\int_0^1 z^{\beta'+[1-\beta']-1}(1-z)^{\beta+[1-\beta]}dz$$

$$=(-1)^{[1-\beta']-1}\{\beta'\Gamma(-\beta-\beta')\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])/\Gamma(1-\beta-\beta'-[1-\beta]-[1-\beta'])\Gamma(\beta+\beta'+1+[1-\beta]+[1-\beta'])\}\psi'(\xi).$$

从而（2.27）成立。

对于解（2.25）′也可类似地进行验证。至于解（2.25）″，对ξ、η微分后得

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=\eta}=(-1)^{[\beta']}[\beta']!(1-\beta-\beta')!\psi'(\xi)$$

$$\times\int_0^1 z^{\beta'-1}(1-z)^{[\beta']-\beta'+1}dz+(-1)^{[\beta']}(\beta')!$$

$$(1-\beta-\beta')![1-\beta]\psi(\xi)\int_0^1 z^{\beta'}(1-z)^{[\beta']-\beta}dz$$

$$=(-1)^{[\beta']}(-\beta-\beta'-1)![(-\beta-\beta')\Gamma([\beta']-\beta'+2)$$

$$+(1-\beta)\Gamma([\beta']+\beta+1)]\frac{\psi'(\xi)}{[\beta'+1]!}$$

$$=(-1)^{[\beta']-1}(-\beta-\beta'-1)!\,\Gamma(\beta')\Gamma([\beta']-\beta'+1)\beta\psi'(\xi),$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right|_{\xi=\eta}=(-1)^{[\beta']}[\beta']!\,(-\beta-\beta')!\,\psi'(\xi)$$

$$\times\int_0^1 z^{\beta'}(1-z)^{[\beta']-\beta'}dz-(-1)^{[\beta']}[\beta']!\,(-\beta-\beta')!\,[-\beta]$$

$$\times\psi'(\xi)\int_0^1 z^{\beta'}(1-z)^{[\beta']-\beta'}dz=(-1)^{[\beta']-1}(-\beta-\beta'-1)!$$

$$\times\Gamma(\beta')\Gamma([\beta']-\beta'+1)\beta'\psi'(\xi).$$

因此，也得到同样的结论.

下面转入定解问题的讨论.

EPD方程的奇性 Cauchy 问题的提法与 $\beta+\beta'$ 的值有关. 当 $\beta+\beta'\geqslant 1$ 时，可以提一种特殊的古典Cauchy问题

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0,\ \beta+\beta'\geqslant 1,\\ u(\xi,\ \xi)=\tau(\xi), & (2.28)\\ \left(\beta'\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\beta\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\xi=\eta}=0, & (2.29)\end{cases}$$

其中 $\tau(\xi)$ 是 $[1-\beta]+[1-\beta']+2$ 次连续函数.

由于 (2.28) 与 $(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$ 或 $\ln(\xi-\eta)$ 同阶的一类解 $u_2$ 中的任意函数 $\varphi$ 只能为零，问题 (*A*) 的解应由 (2.25) 表示，此时条件 (2.29) 自然满足. 由 (2.28) 所确定的 $\psi(\xi)$ 为

$$\psi(\xi)=(-1)^{[1-\beta]}\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}\tau(\xi).$$

因此，问题 (*A*) 的解为

$u(\xi,\ \eta)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{[1-\beta]} \sum_{l=0}^{[1-\beta']} C^k_{[1-\beta]} C^l_{[1-\beta']} \\
&\times \frac{(-1)^{[1-\beta]-l}\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta]+[1-\beta'])}{\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])} \\
&\times \frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma([1-\beta]+[1-\beta']+\beta+\beta'-k-l)} \\
&\times (\xi-\eta)^{[1-\beta]+[1-\beta']-k-l}\int_0^1 \tau^{([1-\beta]+[1-\beta']-k-l)} \\
&\times [\xi(1-z)+\eta z] z^{\beta'+[1-\beta]+[1-\beta']-k-1} \\
&\times (1-z)^{\beta+[1-\beta']+[1-\beta]-l-1} dz. \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

注意　由前面的情况推知，在问题（$A$）中，条件（2.29）实际上可作为结果而导出。

当$\beta+\beta'<1$时，可提一种非古典的Cauchy问题：

$$
(B)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0,\ \beta+\beta'<1, \\
\lim\limits_{\xi-\eta\to0}(\xi-\eta)^{\beta+\beta'-1}u(\xi,\eta)=\nu(\xi),
\end{cases} \qquad (2.31)
$$

其中$\nu(\xi)$是$[\beta]+[\beta']+2$次连续函数。

由于$(\xi-\eta)^{\beta+\beta'-1}$当$\xi-\eta\to0$时趋于无穷大，因此，方程的正则解$u_1$中的任意函数$\varphi(\xi)$应为零。问题（$B$）的解只能以（2.26）形式出现。由条件（2.31）得

$$
\varphi(\xi)=(-1)^{[\beta]}\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma([\beta]+1-\beta)\Gamma([\beta']+1-\beta')}\nu(\xi).
$$

于是，问题（$B$）的解为

$$
\begin{aligned}
&u(\xi, \eta) \\
&= \sum_{k=0}^{[\beta]} \sum_{l=0}^{[\beta']} C_{[\beta]}^{k} \ C_{[\beta']}^{l} \\
&\times \frac{(-1)^{[\beta]+k}\Gamma(\beta+\beta')\Gamma(\beta+\beta'-1+k+l-[\beta]-[\beta'])}{\Gamma([\beta]+1-\beta)\Gamma([\beta']+1-\beta')\Gamma(\beta+\beta'-1-[\beta]-[\beta'])} \\
&\times (\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'-k-l+[\beta]+[\beta']}\int_0^1 \nu^{([\beta]+[\beta']-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z] \\
&\times z^{[\beta]+-[\beta']\beta-l}(1-z)^{[\beta]+[\beta']-\beta-k}dz. \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

问题（$A$）和（$B$）都只是在 EPD 方程解的集合中的一个子类中求解，当然不是最一般的提法．注意问题（$B$）也可以改为这样提：

$$
(B)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0, \ \beta+\beta'<1, \\
u(\xi, \xi)=0, \\
\lim\limits_{\eta-\xi\to 0}(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=(1-\beta-\beta')\nu(\xi).
\end{cases}
$$

而当 $0<\beta+\beta'<1$ 时，由于同时可以提问题（$A$）和（$B$），二者结合起来，就可以提问题：

$$
(C)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0, \\
0<\beta+\beta'<1, \\
u(\xi, \xi)=0, \\
\lim\limits_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=(1-\beta-\beta')\nu(\xi).
\end{cases}
$$

并且问题（$C$）的解可以表为（2.30）和（2.32）之和．

当β，β′为任意实数时，问题（$C$）可作如下推广。当β＋β′＜0而不等于负整数时，可提问题：

$$
(D)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0 \\
\qquad(\beta+\beta'<0,\ \beta+\beta'=1,\ 2,\ \cdots), \\
u(\xi,\ \xi)=\tau(\xi), \\
\lim\limits_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)^{[-\beta-\beta']+1+\beta+\beta'}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right) \\
=\dfrac{\Gamma(2-\beta-\beta')}{\Gamma(-\beta-\beta'-[-\beta-\beta'])}\nu(\xi).
\end{cases}
$$

当β＋β′＞1而不等于正整数时，可提问题：

$$
(E)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0 \\
\qquad(\beta+\beta'<0,\ \beta+\beta'=1,\ 2,\ \cdots),\\
\lim\limits_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)^{\beta+\beta'-1}u(\xi,\ \eta)=\nu(\xi), \\
\lim\limits_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'+[\beta+\beta']}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right. \\
\left.+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)^{[\beta+\beta']}[(\xi-\eta)^{\beta+\beta'-1}u(\xi,\ \eta)] \\
=\dfrac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta+\beta'-[\beta+\beta'])}\tau(\xi).
\end{cases}
$$

其中τ，ν是具有相应微商的函数。问题（$D$）、（$E$）的解也可表为（2.30）和（2.32）之和。

当β＋β′＝－1，－2，…，但β，β′不为负整数时，如果

$\tau(\xi)$是$\xi$的$-\beta-\beta'$次多项式，则同样可提问题（$D$）。当$\beta+\beta'=2$，3，…，但$\beta$，$\beta'$不同时为正整数时，如设$\nu(\xi)$是$\xi$的$\beta+\beta'-2$次多项式，则同样可提问题（$E$）。

## §3. 奇性边值问题和Hadamard函数

本节首先引入 Hadamard 函数的概念，接着对特殊的$\beta$值求出$E(\beta,\beta')$ 的 Hadamard 函数，最后对一般的$\beta$，$\beta'$求出$E(\beta,\beta')$的Hadamard函数。

### I Hadamard函数

考虑两个奇性定解问题：

$$(a)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0,\\ 0<\beta,\ \beta'<1,\ \beta+\beta'<1,\\ u(\xi,\xi)=\tau(\xi),\quad 0\leqslant\xi\leqslant A,\\ u(\xi,0)=\nu(\xi),\quad \tau(0)=\nu(0).\end{cases}$$

和

$$(b)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0,\\ 0<\beta,\ \beta'<1,\ \beta+\beta'>0,\\ \lim\limits_{\xi-\eta\to0}\dfrac{1}{2}(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\tau(\xi),\\ u(\xi,0)=\nu(\xi),\quad 0\leqslant\xi\leqslant A.\end{cases}$$

我们应用Hadamard推广的 Riemann 法来解这两个问题．设$M$（$\xi_0$，$\eta_0$）是$\triangle OAB$任一点（图5），在特殊矩形$\square MPQR$

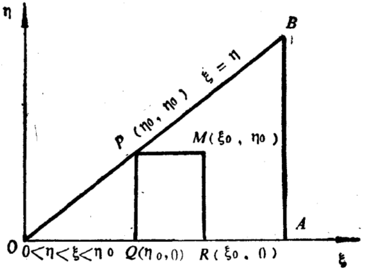



图 5

和△$POQ$上分别应用Green公式于恒等式

$$v\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]$$

$$-u\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta' v}{\xi-\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\beta v}{\xi-\eta}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{2\beta'}{\xi-\eta}uv\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{2\beta}{\xi-\eta}uv\right).$$

设$u$是$E(\beta,\beta')u=0$的解，$v$是其共轭方程的解，则在□$MPQR$中有

$$0=\int_{\square MPQR}\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{2\beta'}{\xi-\eta}uv\right)d\eta$$

$$-\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{2\beta}{\xi-\eta}uv\right)d\xi$$

$$=\frac{1}{2}\int_M^P\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{2\beta}{\xi-\eta}uv\right)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_P^Q\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{2\beta'}{\xi-\eta}uv\right)d\eta$$

$$-\frac{1}{2}\int_Q^B\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{2\beta}{\xi-\eta}uv\right)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_B^M\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{2\beta'}{\xi-\eta}uv\right)d\eta$$

$$=\frac{uv}{2}\bigg|_M-\frac{uv}{2}\bigg|_P+\int_M^P u\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\beta}{\xi-\eta}v\right)d\xi-\frac{uv}{2}\bigg|_P$$

$$-\int_P^Q u\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\beta'}{\xi-\eta}v\right)d\eta+\frac{uv}{2}\bigg|_B-\frac{uv}{2}\bigg|_Q$$

$$-\int_Q^B v\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\beta}{\xi-\eta}u\right)d\xi-\frac{uv}{2}\bigg|_M-\frac{uv}{2}\bigg|_B$$

$$-\int_B^M u\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\beta'}{\xi-\eta}v\right)d\eta.$$

如果选取$v$是$E(\beta,\ \beta')$的Riemann函数

$$v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)=\left(\frac{\xi-\eta}{\xi_0-\eta_0}\right)^{\beta}\ F\left(\beta,\ 1-\beta',\ 1,\ \frac{1}{\sigma'}\right),$$

$$\sigma'=\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}. \tag{2.33}$$

由于Riemann函数在特征线$\xi=\xi_0$，$\eta=\eta_0$上所满足的条件得到

$$u(\xi_0,\ \eta_0)=uv\Big|_P+\int_P^Q u\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\beta'}{\xi-\eta}v\right)d\eta$$
$$+\int_Q^R v\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}u\right)d\xi. \tag{2.34}$$

在$\triangle POQ$上有

$$0=\int_P^0\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial \eta}-u\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{2\beta'}{\xi-\eta}uv\right)d\eta$$
$$-\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{2\beta}{\xi-\eta}uv\right)d\xi+\frac{uv}{2}\Big|_Q$$
$$-\frac{uv}{2}\Big|_0-\int_0^Q v\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}u\right)d\xi$$
$$+\frac{uv}{2}\Big|_P-\frac{uv}{2}\Big|_Q-\int_Q^P u\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\beta'}{\xi-\eta}v\right)d\eta$$
$$=-\int_0^P\left\{\frac{v}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-\left[\frac{u}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\beta+\beta'}{\xi-\eta}uv\right]\right\}_{\eta=\xi}d\xi+\frac{uv}{2}\Big|_P-\frac{uv}{2}\Big|_0$$
$$-\int_0^Q v\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}u\right)d\xi$$
$$-\int_Q^P u\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\beta'}{\xi-\eta}v\right)d\eta. \tag{2.35}$$

我们已经知道，Riemann函数已不可能连续地开拓到区域$\triangle POQ$中。Hadamard认为，通过特征线$\xi=\eta_0$，Riemann函数具有间断。用$v_+$和$v_-$分别表示（$\xi$，$\eta$）从右和左侧趋于$\overline{PQ}$时$v$的值，（2.34）和（2.35）相减，得到

$u(\xi_0, \eta_0)$

$$= \frac{uv}{2}\bigg|_0 + \frac{uv}{2}\bigg|_P + \int_P^Q \left\{ u\left[ (v_+ - v_-)_\eta + \frac{\beta'}{\xi - \eta}(v_+ - v_-) \right] \right\}_{\xi = \eta_0}$$

$$\times d\eta + \int_0^Q \left( v\left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\beta}{\xi - \eta} u \right) \right)_{\eta = 0} d\xi + \int_0^P \left\{ \frac{v}{2}\left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right.$$

$$\left. - u\left[ \frac{1}{2}\left( \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\beta + \beta'}{\xi - \eta} v \right] \right\}_{\xi = \eta} d\eta.$$

因此，要将 $u(\xi_0, \eta_0)$用问题（$a$）的数据表出，$v$ 在$\triangle POQ$中就应是共轭方程满足下列条件的解

$$\left[ (v_+ - v_-)_\eta + \frac{\beta'}{\xi - \eta}(v_+ - v_-) \right]_{\xi = \eta_0} = 0, \qquad (2.36)$$

$$v|_{\xi = \eta} = 0. \qquad (2.37)$$

需将 $u(\xi_0, \eta_0)$用问题（$b$）的数据表出，$v$ 在$\triangle POQ$ 中就应是共轭方程满足下列条件的解

$$\begin{cases} \left[ (v_+ - v_-)_\eta + \dfrac{\beta'}{\xi - \eta}(v_+ - v_-) \right]_{\xi = \eta_0} = 0, \\ \left[ \dfrac{1}{2}(v_\xi - v_\eta) - \dfrac{\beta + \beta'}{\xi - \eta} v \right]_{\xi = \eta} = 0. \end{cases} \qquad (2.38)$$

这样的函数称为Hadamard函数，简写为H-函数，并用$\overline{v}$表示它在$\triangle POQ$的部分。

如果$H$-函数一旦求出，则问题（$a$）和（$b$）的解可分别表为

$$u(\xi_0, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} \overline{v}(t, 0; \xi_0, \eta_0)\left[ \nu'(t) + \frac{\beta}{t}\nu(t) \right] dt$$

$$+\int_{\eta_0}^{\xi_0} v(t, 0; \xi_0, \eta_0)\cdot\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]dt$$

$$+\int_0^{\eta_0} \tau(\xi)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}-\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}-\frac{\beta+\beta'}{\xi-\eta}\bar{v}\right)\right]_{\xi=\eta} d\xi. \qquad (2.39)$$

和

$$u(\xi_0, \eta_0)=\left.\frac{u\bar{v}}{2}\right|_0+\left.\frac{u\bar{v}}{2}\right|_P$$

$$+\int_0^{\eta_0} \bar{v}(t, 0; \xi_0, \eta_0)\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]$$

$$dt+\int_{\eta_0}^{\xi_0} \bar{v}(t_0, 0; \xi_0, \eta_0)\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]dt$$

$$+\int_0^{\eta_0} \tau(\xi)\left[\frac{\bar{v}}{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}}\right]_{\xi=\eta} d\xi. \qquad (2.40)$$

## Ⅰ 一个特例

如何去寻找H-函数，我们从一个具体例子中去寻找启发。

在引言中，我们曾提到波动方程和EPD方程的联系。考虑二维柱波方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

满足特殊初始条件

$$u(x, y, 0)=0, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r), \quad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

的解。由Poisson公式知，这个问题的解为

$u(x_0, y_0, t_0)$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant t_0^2} \frac{g(r)dxdy}{\sqrt{t_0^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

引入柱坐标 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，并注意在坐标轴的旋转变换下积分值不改变，可以认为 $(x_0,\ y_0)$ 就落在 $x$ 轴上，这样，

$$u(x_0,\ y_0,\ t_0) = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{g(r)rdrd\theta}{(t_0^2-r^2-r_0^2+2rr_0\cos\theta)}. \quad (2.41)$$

上式右端只与 $r_0$，$t_0$ 有关，实际上是轴对称波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r_0^2} - \frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r_0} = 0.$$

的解，即是方程 $E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 的解.

(2.41) 右端对 $\theta$ 的积分区域是 $[0,\ 2\pi]$ 上的一个子区间，使得

$$t_0^2 - r^2 - r_0^2 + 2rr_0\cos\theta \geqslant 0. \quad (2.42)$$

现在，我们把这个区间找出来. 记

$$k(r_0,\ t_0,\ r) = \frac{r}{\pi}\int (t_0^2 - r^2 - r_0^2 + 2rr_0\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta. \quad (2.43)$$

由于

$$\begin{aligned} & t_0^2 - r^2 - r_0^2 + 2rr_0\cos\theta \\ &= t_0^2 - (r - r_0)^2 - 2rr_0 + 2rr_0\cos\theta \\ &= 4rr_0\left(\zeta + \frac{\cos\theta - 1}{2}\right). \end{aligned}$$

条件 (2.4) 变为

$$\cos\theta \geqslant 1 - 2\zeta，\text{其中 } \zeta = \frac{t_0^2 - (r - r_0)^2}{4rr_0}.$$

如果 $t_0 < |r - r_0|$，则 $\zeta < 0$，$\cos\theta > 1$，所以积分区域是空集，

$k=0$；如果$|r-r_0|\leqslant t_0\leqslant r+r_0$，则$0\leqslant\zeta\leqslant 1$，令$\cos\theta=1-2\zeta z$，$(0\leqslant z\leqslant 1)$，$\zeta+\dfrac{\cos\theta-1}{2}=\zeta(1-z)$，$d\cos\theta=-\sin\theta d\theta=-2\zeta\,dz$，$\sin\theta=(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}=(4\zeta z-4\zeta^2z^2)^{\frac{1}{2}}=2\zeta^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}(1-\zeta z)^{\frac{1}{2}}$，$k=\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}$

$\times(1-\zeta z)^{-\frac{1}{2}}dz=\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}\right)F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1,\zeta\right)$；如果$t_0>r+r_0$，则$\zeta>1$，$0<\theta<\pi$，令$\cos\theta=1-2z$，$\sin\theta\,d\theta=2dz$，$\sin\theta=(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}=2z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}$，$d\theta=z^{-\frac{1}{2}}$

$\times(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$，$\zeta+\dfrac{1}{2}\cos\theta=\zeta-z$，

$$k=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-z)^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \zeta^{-1}\right).$$

如果注意到$\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}\right)=\pi$，归纳起来就有

$$k(r_0,\ t_0,r)\doteq\begin{cases}0, & \text{当}t_0<|r-r_0|,\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \xi\right) & \text{当}|r-r_0|<t_0\leqslant r+r_0,\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}F\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \zeta^{-1}\right) & \text{当}r+r_0<t_0.\end{cases}\tag{2.44}$$

将$k$的表达式代入到（2.41），此时又要区分$r$的变化区域.首先，当$t_0<r+r_0$，即$0<r<t_0+r_0$；其次，如$|r-r_0|<t_0\leqslant r+r_0$，又分两种情形，（$i$），如$t_0>r_0$，则由不等式$|r-r_0|\leqslant t_0$得$-t_0\leqslant r-r_0\leqslant t_0$，即$t_0-r_0\leqslant r\leqslant t_0+r_0$.（$ii$），如$t_0\leqslant r_0$，则由不等式$|r-r_0|\leqslant t_0$得$-t_0\leqslant r-r_0\leqslant t_0$，即$r_0-t_0\leqslant r\leqslant r_0+t_0$，因此

$$u(r_0,\ t_0)=\frac{1}{2}\int_{r_0-t_0}^{r_0+t_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \zeta\right)g(r)dr,$$

$$0\leqslant t_0\leqslant r_0, \tag{2.45$_1$}$$

$$u(r_0,\ t_0)=\frac{1}{2}\int_0^{t_0-r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \zeta^{-1}\right)$$

$$\times g(r)dr+\frac{1}{2}\int_{t_0-r_0}^{t_0+r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \zeta\right)$$

$$\times g(r)dr.\quad t_0\geqslant r_0 \tag{2.45$_2$}$$

上式是$E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$如下正则Cauchy问题的解

$$\begin{cases} u_{t_0t_0}-u_{r_0r_0}-\dfrac{1}{r_0}u_{r_0}=0, \\ u(r_0,\ 0)=0,\quad u_{t_0}|_{t_0=0}=g(r_0). \end{cases}$$

由图（6）可以看出，（2.45）$_2$（$t_0\geqslant r_0$）就相当于一个奇性边值问题的解，而$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \zeta^{-1}\right)$应是$E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$的一个H-函数.

**Ⅱ Hadamard函数的作法（$\beta=\beta'$）**

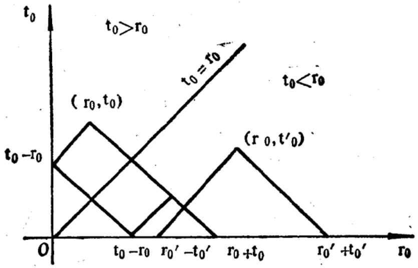



图 6

现在把$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$的结果和一般的情形对比起来看．设β=β′，

令$\zeta = t + r$，$\eta = t - r$，则

$$\xi - \eta = 2r,$$

$$(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta) = (t_0 + r_0 - t - r)(t_0 - r_0 - t + r)$$
$$= (t - t_0)^2 - (r - r_0^2),$$

$$\frac{1}{\sigma'} = \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{(\xi - \eta)\cdot(\xi_0 - \eta_0)} = \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{4yy_0}.$$

Riemann函数有表达式

$$\left(\frac{\xi - \eta}{\xi_0 - \eta_0}\right)^\beta F\left(\beta,\ 1 - \beta,\ 1,\ \frac{1}{\sigma'}\right)$$
$$= \left(\frac{r}{r_0}\right)^\beta F\left(\beta, 1 - \beta, 1, \frac{(t - t_0)^2 - (r - r_0)^2}{4rr_0}\right).$$

当$\beta=\frac{1}{2}$时，这正是

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \zeta\right).$$

因此，和$E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$的H-函数

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \zeta^{-1}\right)$$

$$=\frac{(\xi-\eta)}{(\xi_0-\xi)^{\frac{1}{2}}(\eta_0-\eta)^{\frac{1}{2}}}\cdot F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \sigma'\right)$$

相对应的$E(\beta,\ \beta)$的H-函数应是

$$C_1\ \frac{(\xi-\eta)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta_0-\eta)^{\beta}}\ F(\beta,\beta,2\beta,\sigma'),\qquad (2.46)$$

和

$$C_2\ \frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}}\ F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,\sigma').\qquad (2.47)$$

其中$C_1$，$C_2$是常数（因为（2.46）和（2.47）关于（$\xi_0$，$\eta_0$）和（$\xi$，$\eta$）都分别是$E(\beta,\ \beta)$和其共轭方程的解）。

1937年，$S$.Gellerstedt在他的博士论文[34]中首先指出问题（$a$）和（$b$）的H-函数分别是

$$\overline{v}_a(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}\cdot\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta;\ 2-2\beta,\ \sigma'),\tag{2.47}$$

$$\overline{V_b}(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}$$

$$\times\frac{(\xi-\eta)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta_0-\eta)^{\beta}}F(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \sigma').\tag{2.48}$$

但是没有谈到是如何得到的，下面我们给出一种分析过程。

如果作复数代换$\xi=x+y$，$\eta=x-y$，则H-函数在奇线$\xi=\eta$上的条件（2.37）实际上就相当于要求它是$y$的奇函数。至于条件（2.38）稍微复杂些，可以作这样的代换

$$\xi=x+(1-2\beta)\,y^{\frac{1}{1-2\beta}},\quad \eta=x-(1-2\beta)\,y^{\frac{1}{1-2\beta}},$$

则（2.38）化为

$$(\xi-\eta)^{2\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left[\frac{v}{(\xi-\eta)^{2\beta}}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{v}{y^{\frac{2\beta}{1-2\beta}}}\right]_{y=0}=0.$$

因此，它相当于要求$y^{-\frac{2\beta}{1-2\beta}}v$是$y$的偶数。这样一来，可以仿照作Green函数的镜象法来作H-函数。

我们还是从R-函数出发。为了使得满足H-函数在奇线$\xi=\eta$上的条件，分别求出R-函数的奇部和偶部。在$E(\beta,\ \beta')$的R-函数$v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)$中将$\xi$和$\eta$互换，那么

$$v(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)-v(\eta,\ \xi;\xi_0,\ \eta_0),\tag{2.49}$$

就满足条件（2.37），而

$$(\xi-\eta)^{2\beta}\left[\frac{v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)}{(\xi-\eta)^{2\beta}}+\frac{v(\eta,\ \xi;\ \xi_0,\ \eta_0)}{(\eta-\xi)^{2\beta}}\right].\tag{2.50}$$

就满足条件（2.38）．由于$E(\beta,\ \beta)$关于$\xi$和$\eta$是对称的，$\xi$和$\eta$交换方程不变，所以$v(\eta,\ \xi;\ \xi_0,\eta_0)$关于动定两点$(\xi,\ \eta)$和$(\xi_0,\ \eta_0)$仍然分别是共轭方程和原方程的解，从而(2.49)和(2.50)也是如此。最后，我们指出，(2.49)和(2.50)也满足(2.36)，实际上，此时(2.36)变为对$v(\eta,\ \xi;\xi_0,\ \eta_0)$的条件

$$\left[v_\eta(\eta,\ \xi;\xi_0,\ \eta_0)+\frac{\beta}{\xi-\eta}v(\eta,\ \xi;\xi_0,\eta_0)\right]_{\xi=\eta_0}=0\ . \tag{2.36$'$}$$

由于$v(\eta,\ \xi;\ \xi_0,\ \eta_0)$就是$M(\xi_0,\ \eta_0)$点关于奇线$\xi=\eta$的对称点$M(\eta_0,\ \xi_0)$的R-函数，(2.36)′正是它所满足的 Riemann 条件。

所以（2.49）和（2.50）就是我们所要求的H-函数．剩下的只是将它们的具体表达式算出来．利用超几何函数的两个延拓公式

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}$$

$$\times F\left(a,\ 1-c+a,\ 1-b+a,\ \frac{1}{z}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}$$

$$\times F\left(b,\ 1-c+b,\ 1-a+b,\ \frac{1}{z}\right),$$

$$F(a,\ b,\ c,\ z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

$$\times F(a,\ b,\ a+b-c+1,\ 1-z)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}$$

$$\times F(c-a,\ c-b,\ c-a-b+1,\ 1-z).$$

得到

$$v(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)$$

$$=\frac{(\xi-\eta)^\beta}{(\xi_0-\eta_0)^\beta}F\left(\beta,\ 1-\beta,\ 1,\ \frac{1}{\sigma^1}\right)$$

$$=\frac{(\xi-\eta)^\beta}{(\xi_0-\eta_0)^\beta}\left\{\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\right\}(-\sigma')^\beta F(\beta,\beta,2\beta,\ \sigma')$$

$$+\frac{\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}(-\sigma')^{1-\beta}F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \sigma')$$

$$=\frac{(-1)^\beta\Gamma(1-2\beta)(\xi-\eta)^{2\beta}}{\Gamma^2(1-\beta)(\xi_0-\xi)^\beta(\eta-\eta_0)^\beta}F(\beta,\ \beta,2\beta,\ \sigma')$$

$$-\frac{(-1)^\beta\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}\ \frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \sigma'),\tag{2.51}$$

和

$$v(\eta,\ \xi;\ \xi_0,\ \eta_0)$$

$$=\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^\beta(\eta_0-\eta)^\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 1,\ \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^\beta(\eta_0-\eta)^\beta}\left\{\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}F(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\sigma')\right.$$

$$+\frac{\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}\ \frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \sigma')\Big]$$

$$=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\,\frac{(-1)^\beta(\xi-\eta)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^\beta(\eta-\eta_0)^\beta}F(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \sigma')$$

$$+\frac{\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}\,\frac{(-1)^\beta(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \sigma'). \qquad (2.52)$$

其中，由于

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{(\eta-\xi_0)(\xi-\eta_0)}{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)},\quad 1-\frac{1}{\sigma}=\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\equiv\sigma'.$$

将（2.51）和（2.52）代入到（2.49）中，得到

$$v(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)-v(\eta,\ \xi;\xi_0,\ \eta_0)$$

$$=\frac{2\cos\beta\pi\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}\,\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \sigma').$$

再注意到Γ—函数的余元关系式 $\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)=\sin\beta\pi$，我们有

$$\frac{\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta)}=\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2\beta-1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma^2(\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-2\beta)}$$

$$=\frac{\sin\beta\pi}{\sin(2\beta-1)\pi}\cdot\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}$$

$$=\frac{-\sin\beta\pi}{\sin2\beta\pi}\cdot\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}$$

$$=\frac{-\sin\beta\pi}{2\sin\beta\pi\cos\beta\pi}\cdot\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}$$

$$= \frac{-\Gamma(1-\beta)}{2\cos\beta\pi\,\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}.$$

同样，将（2.51）和（5.52）代入到（2.50）中，得到

$$(\xi-\eta)^{2\beta}\left[\frac{v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)}{(\xi-\eta)^{2\beta}}+\frac{v(\eta,\ \xi;\xi_0,\ \eta_0)}{(\eta-\xi)^{2\beta}}\right]$$

$$= \frac{2\cos\beta\pi\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\ \frac{(\xi-\eta)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta-\eta_0)^{\beta}}$$

$$\times F(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \sigma'),$$

而

$$\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} = \frac{\sin\beta\pi}{\sin 2\beta\pi}\cdot\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{2\cos\beta\pi\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}.$$

因此，要求的H-函数的确就是（2.47），和（2.48）。

这样，问题（$a$）的Riemann-Hadamard函数为

$$H_a(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0) = \begin{cases} \dfrac{(\xi-\eta)^{\beta}}{(\xi_0-\eta_0)^{\beta}}F\left(\beta,\ 1-\beta,\ 1,\right. \\ \left.\dfrac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}\right],\ \text{当}\ \xi>\eta, \\ \dfrac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)} \\ \times\dfrac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta)^{1-2\beta}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}} \\ \times F\left[1-\beta, 1-\beta, \dfrac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}\right], \\ \text{当}\ \xi<\eta_0, \end{cases}$$

问题（$b$）的Riemann-Hadamard函数为

$$H_b(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}\dfrac{(\xi-\eta)^\beta}{(\xi_0-\eta_0)^\beta}F\left(\beta,1-\beta,1,\dfrac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}\right),\ \text{当}\ \xi>\eta_0,\\[2ex] \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}\cdot\dfrac{(\xi-\eta)^{2\beta}}{(\xi_0-\xi)^\beta(\eta-\eta_0)^\beta}\\ \times F\left\{\beta,\beta,2\beta,\dfrac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}\right\},\\ \quad\text{当}\ \xi<\eta_0.\end{cases}$$

问题（$a$）的解为

$$\begin{aligned}&u(\xi_0,\eta_0)\\&=\int_0^{\xi_0}H_a(t,0;\xi_0,\eta_0)\left\{\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right\}dt\\&\quad+\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{\eta_0+\varepsilon}\tau(\varepsilon)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_a}{\partial\xi}-\frac{\partial H_a}{\partial\eta}\right)-\frac{2\beta}{\xi-\eta}H_a\right]_{\xi-\eta=\varepsilon}d\xi\\&=\int_0^{\xi_0}H_a(t,0;\xi_0,\eta_0)\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]dt\\&\quad+\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}\cdot(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}\int_0^{\eta_0}\tau(t)(\xi_0-t)^{\beta-1}\\&\quad\times(\eta_0-t)^{\beta-1}dt.\end{aligned}\tag{2.53}$$

问题（$b$）的解为

$$\begin{aligned}u(\xi_0,\eta_0)&=\int_0^{\xi_0}H_b(t,0;\xi_0,\eta_0)\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]dt\\&\quad+\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{\eta_0+\varepsilon}\tau(\xi)\left[\frac{H_b}{(\xi-\eta)^{2\beta}}\right]_{\xi-\eta=\varepsilon}d\xi\end{aligned}$$

$$=\int_0^{\xi_0} H_b(t,0;\xi_0,\eta_0)\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]dt$$

$$+\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\beta)}\int_0^{\eta_0}\tau(t)(\xi_0-t)^{-\beta}(\eta_0-t)^{-\beta}dt. \tag{2.54}$$

**Ⅳ 一般情况下的Hadamard函数（$\beta\neq\beta'$）**

回到问题（$a$）和问题（$b$），由$\beta\neq\beta'$时Hadamard函数求出过程可见，要在$\triangle POQ$中（见图5）满足条件（2.36），（2.37）和（2.38），$H_a$和$H_b$不是别的，正是$E$（$\beta$，$\beta'$）的Riemann函数在该区域中的“广义”延拓，最多再乘以一个常数因子。从这一结果出发，我们试图将其推广到$\beta\neq\beta'$时的情形。

利用超几何函数的解析延拓公式

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}$$

$$\times F(a,a-c+1,a-b+1,z^{-1})$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}$$

$$\times F(b,b-c+1,b-a+1,z^{-1}).$$

将其应用于第一章第五节第三段中Ⅰ区域内的Riemann函数（1.45），得到

$$\frac{(\xi-\eta)^{\beta'}(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{\beta}}F\left(\beta,1-\beta',1,\frac{1}{\sigma'}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}(-1)^{\beta}\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta_0-\eta)^{\beta}}$$

$$\times F(\beta,\beta,\beta+\beta',\sigma')+\frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}(-1)^{-\beta'}$$

$$\frac{(\xi-\eta)(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta'}(\eta_0-\eta)^{1-\beta'}}$$

$$\times\ F(1-\beta',\ 1-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \sigma').$$

由Riemann函数导出过程和超几何函数性质可知，上式中的两项均满足$E(\beta,\beta')$的共轭方程，后一项满足（2.37），前一项当$\beta+\beta'>0$满足（2.38），剩下的只须验证，它们满足(2.36)。于是我们取问题（$a$）的Riemann-Hadamard函数为

$$H_a=\begin{cases} C_a\dfrac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\eta_0-\xi)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta'}(\eta_0-\eta)^{1-\beta'}} \\ \times F(1-\beta',1-\beta',2-\beta-\beta',\sigma'),\ \xi<\eta_0, \\ \dfrac{(\xi-\eta)^{\beta'}(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{\beta}}\cdot F\left(\beta,\ 1-\beta',\ 1,\ \dfrac{1}{\sigma'}\right), \\ \xi>\eta_0. \end{cases} \tag{2.56}$$

问题（$b$）的Riemann-Hadamard函数为

$$H_b=\begin{cases} C_b\dfrac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}(\eta_0-\xi)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta_0-\eta)^{\beta}} \\ \times F(\beta,\ \beta,\ \beta+\beta',\ \sigma'),\ \ \xi<\eta_0, \\ \dfrac{(\xi-\eta)^{\beta'}(\xi-\eta_0)^{\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{\beta}}\cdot F\left(\beta,\ 1-\beta',\ 1,\ \dfrac{1}{\sigma'}\right), \\ \xi>\eta_0. \end{cases} \tag{2.56}$$

其中，当$\beta'-\beta<1$时

$$C_a=\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}, \tag{2.57}$$

$$C_b=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\beta')\Gamma(1-\beta')}.$$

而

$$\sigma'=\frac{(\xi-\eta)-(\xi_0-\eta_0)}{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}. \tag{2.58}$$

下面我们证明，当$\beta'\neq 1, 2, 3, \cdots$时，如果$\beta'-\beta<1$，则问题（$a$）的Riemann-Hadamard函数由（2.55）给出。而当$\beta+\beta'<0$，$\beta\neq 0$时，如果$\beta'-\beta<1$，则问题（$b$）的Riemann-Hadamard函数由（2.56）给出。其中$\sigma'$由（2.58）给出，而$C_a$，$C_b$由（2.57）给出。

先证（2.55）。对此，只须验证其满足（2.36）。事实上，在（2.55）的后一式中对$\eta$求导得到（记$\xi>\eta_0$的$H_a$为$V_-$，$\xi<\eta_0$的$H_a$为$V_+$）

$$\frac{\partial V}{\partial\eta}=-\frac{\beta'}{\xi-\eta}V_- -\beta(1-\beta')\frac{(\xi_0-\xi)(\xi-\eta_0)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{1+\beta}(\xi-\eta)^{2-\beta'}}$$
$$\times F\left(1+\beta,\ 2-\beta',\ 2,\ \frac{1}{\sigma'}\right).$$

在（2.55）的第一式中对$\eta$求导，注意应用公式

$$\frac{d}{dz}[z^b F(a,\ b,\ c,\ z)]=bz^{b-1}F(a,\ b+1,c,z), \quad (*)$$

得到

$$\frac{\partial V_+}{\partial\eta}=-\frac{\beta'}{\xi-\eta}V_+$$
$$-(1-\beta')C_a\frac{(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\eta_0-\xi)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta'}(\eta_0-\eta)^{2-\beta'}}$$
$$\times F(1-\beta',\ 2-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \sigma').$$

将以上结果代入（2.36），然后应用超几何函数的解析延拓公式

$$
\begin{aligned}
&F(a,\ b,\ c,\ z)\\
&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,\ b,\ a+b-c+1,1-z)\\
&\quad+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}\\
&\quad\times F(c-a,\ c-b,\ c-a-b+1,\ 1-z),
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\eta}(V_+-V_-)+\frac{\beta'}{\xi-\eta}(V_+-V_-)\\
&=\beta(1-\beta')\frac{(\xi_0-\xi)(\xi-\eta_0)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{1+\beta}(\xi-\eta)^{2-\beta'}}\\
&\quad\times F\left(1+\beta,\ 2-\beta',\ 2,\ \frac{1}{\sigma'}\right)-(1-\beta')C_a\\
&\quad\times\frac{(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\eta_0-\xi)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta'}(\eta_0-\eta)^{2-\beta'}}\\
&\quad\times F(1-\beta',\ 2-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \sigma')\\
&=\frac{\Gamma(\beta'-\beta-1)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(\beta'-1)}\frac{(\xi_0-\xi)(\xi-\eta_0)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{1+\beta}(\xi-\eta)^{2-\beta'}}\\
&\quad\times F\left(1+\beta,\ 2-\beta',\ 2+\beta-\beta',\ 1-\frac{1}{\sigma'}\right)\\
&\quad+\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta')}\frac{(\xi_0-\xi)(\xi_0-\eta)^{\beta'-\beta-1}}{(\xi_0-\eta_0)^{\beta'}(\xi-\eta)^{1-\beta}}\\
&\quad\times F\left(1-\beta,\ \beta',\ \beta'-\beta,\ 1-\frac{1}{\sigma'}\right)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\Gamma(2-\beta')\Gamma(\beta'-\beta-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}\frac{(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\eta_0-\xi)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta'}(\eta_0-\eta)^{2-\beta'}}$$

$$\times F(1-\beta',\ 2-\beta',\ 2+\beta-\beta',\ 1-\sigma')$$

$$-\frac{\Gamma(1+\beta-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta')}\frac{(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\xi_0-\eta)^{\beta'-\beta-1}}{(\xi_0-\xi)^{-\beta}(\eta_0-\eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F(1-\beta,\ -\beta,\ \beta'-\beta,\ 1-\sigma').$$

由此式易分别算出：

$$\lim_{\xi\to\eta_0}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(V_+-V_-)+\frac{\beta'}{\xi-\eta}(V_+-V_-)\right]$$

$$=\begin{cases}0, & 当\beta'-\beta<1,\\ 不存在, & 当\beta-\beta=1,\\ \infty, & 当\beta'-\beta>1.\end{cases}$$

上式表明，当$\beta'-\beta<1$时，(2.55) 确实是（$a$）的Hadamard函数。

类似地可讨论$H_b$，仿同上步骤，经过不太复杂的计算得到

$$\frac{\partial(V_+-V_-)}{\partial\eta}+\frac{\beta'}{\xi-\eta}(V_+-V_-)$$

$$=\beta(1-\beta')\frac{(\xi_0-\xi)(\xi-\eta_0)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\eta_0)^{1+\beta}(\xi-\eta)^{2-\beta'}}$$

$$\times F\left(1+\beta,\ 2-\beta',\ 2,\ \frac{1}{\sigma'}\right)$$

$$-\beta C_b\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'-1}(\eta_0-\xi)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0-\xi)^{\beta}(\eta_0-\eta)^{1+\beta}}F(\beta,1+\beta,\beta+\beta',\sigma')$$

$$= \frac{\Gamma(\beta' - \beta - 1)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(\beta' - 1)} \frac{(\xi_0 - \xi)(\xi - \eta_0)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0 - \eta_0)^{1+\beta}(\xi - \eta)^{2-\beta'}}$$

$$\times F\left(1 + \beta,\ 2 - \beta',\ 2 + \beta - \beta',\ 1 - \frac{1}{\sigma'}\right)$$

$$+ \frac{\Gamma(1 + \beta - \beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta')} \frac{(\xi_0 - \xi)(\xi_0 - \eta)^{\beta'-\beta-1}}{(\xi_0 - \eta_0)^{\beta'}(\xi - \eta)^{1-\beta}}$$

$$\times F\left(1 - \beta,\ \beta',\ \beta' - \beta,\ 1 - \frac{1}{\sigma'}\right)$$

$$- \frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(\beta' - \beta - 1)}{\Gamma(\beta')\Gamma(1-\beta')\Gamma(\beta'-1)} \frac{(\xi - \eta)^{\beta'+\beta-1}(\eta_0 - \xi_0)^{1+\beta-\beta'}}{(\xi_0 - \xi)^{\beta}(\eta_0 - \eta)^{1+\beta}}$$

$$\times F(\beta,\ 1 + \beta,\ 2 + \beta - \beta',\ 1 - \sigma')$$

$$- \frac{\Gamma(1 + \beta - \beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta')} \frac{(\xi - \eta)^{\beta'+\beta-1}(\xi_0 - \eta)^{\beta'-\beta-1}}{(\xi_0 - \xi)^{\beta'-1}(\eta_0 - \eta)^{\beta'}}$$

$$\times F(\beta',\ \beta' - 1,\ \beta' - \beta,\ 1 - \sigma').$$

由此式易算出

$$\lim_{\xi \to \eta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \eta}(V_+ - V_-) + \frac{\beta'}{\xi - \eta}(V_+ - V_-)\right]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当}\beta' - \beta < 1, \\ \text{不存在}, & \text{当}\beta' - \beta = 1, \\ \infty, & \text{当}\beta' - \beta > 1. \end{cases}$$

因此，(2.56) 确实是问题（$b$）的 Riemam-Hadamard 函数。

类似于 (2.39) 和 (2.40)，得到问题（$a$）和（$b$）的解分别为

$$u(\xi_0,\ \eta)=\tau(\eta_0)V(\eta_0,\ \eta_0;\xi_0,\ \eta_0)$$

$$+\int_0^{\eta_0}\tau(\xi)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_a}{\partial\xi}-\frac{\partial H_a}{\partial\eta}\right)-\frac{\beta+\beta'}{\xi-\eta}H_a\right]_{\eta=\xi}d\xi$$

$$+\int_0^{\eta_0}H_a(\xi,\ 0;\xi_0,\ \eta_0)\left[\nu'(\xi)+\frac{\beta}{\xi}\nu(\xi)\right]d\xi$$

$$+\int_{\eta_0}^{\xi_0}V(\xi,\ 0;\xi_0,\ \eta_0)\left[\nu'(\xi)+\frac{\beta}{\xi}\nu(\xi)\right]d\xi. \tag{2.59}$$

和

$$u(\xi_0,\ \eta_0)=u(p)\left(V-\frac{1}{2}H_b\right)_p+\frac{1}{2}(uH_b)_0$$

$$+\int_0^{\eta_0}\tau(\xi)[(\xi-\eta)^{-\beta-\beta'}H_b(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)]_{\eta=\xi}d\xi$$

$$+\int_0^{\eta_0}H_b(\xi,\ 0;\xi_0,\ \eta_0)\left[\nu'(\xi)+\frac{\beta}{\xi}\nu(\xi)\right]d\xi$$

$$+\int_{\eta_0}^{\xi_0}V(\xi,\ 0;\xi_0,\ \eta_0)\left[\nu'(\xi)+\frac{\beta}{\xi}\nu(\xi)\right]d\xi. \tag{2.60}$$

上式中，$v$ 记为（2.55），（2.56）中$H_a$，$H_b$的第二式，$H_a$，$H_b$分别记为（2.55），（2.56）的第一式. 注意到$\frac{\partial H_a}{\partial\eta}$，为计算$\frac{\partial H_a}{\partial\xi}$，利用

$F(a,\ b,\ c,\ z)=(1-z)^{c-a-b}F\ (c-a,\ c-b,\ c,\ z)$ 和（*）不难算出

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_a}{\partial\xi}-\frac{\partial H_a}{\partial\eta}\right)-\frac{\beta+\beta'}{\xi-\eta}H_a\right]_{\eta=\xi}$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\beta')}(\xi_0-\eta_0)^{1-\beta-\beta'}(\xi_0-\xi)^{\beta'-1}(\eta_0-\xi)^{\beta-1}. \tag{2.61}$$

于是得到，当$\nu(\xi)\in C'([0,A])$，$\tau(\xi)\in C([0,A])$且$\beta>0$，$\beta'-\beta<1$，$\beta'+\beta<1$时，问题（$a$）的解为

$$\begin{aligned}
u(\xi,\eta)=&\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\\
&\times\int_0^\eta \tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt\\
&+\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta-1}\\
&\times\int_0^\eta(\xi-t)^{\beta-1}[t\nu'(t)+\beta\nu(t)]\\
&\times F\left(1-\beta,1-\beta,2-\beta-\beta',\frac{(\xi-\eta)t}{\eta(\xi-t)}\right)dt\\
&+(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_\eta^\xi[t\nu'(t)+\beta\nu(t)]\\
&\times F\left(1-\beta,\beta',1,\frac{\eta(\xi-t)}{(\xi-\eta)t}\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

而当$\nu(\xi)\in C'([0,A))$，$\tau(\xi)\in C([0,A))$且$\beta>0$，$\beta'-\beta<1$，$\beta+\beta'>0$时，问题（$b$）的解为

$$\begin{aligned}
u(\xi,\eta)=&\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta')\Gamma(\beta+\beta')}\int_0^\eta\tau(t)(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta'}dt\\
&+\frac{\Gamma(\beta)\xi^{\beta'-\beta}\eta^{-\beta'}}{\Gamma(1-\beta')\Gamma(\beta+\beta')}\int_0^\eta t^{\beta+\beta'-1}(\xi-t)^{-\beta'}[t\nu'(t)+\beta\nu(t)]\\
&\times F\left(\beta',\beta',\beta+\beta',\frac{(\xi-\eta)t}{\eta(\xi-t)}\right)dt
\end{aligned}$$

$$+(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_{\eta}^{\xi}t^{\beta-1}[t\nu'(t)+\beta\nu(t)]$$

$$\times F\left(1-\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{\eta(\xi-t)}{(\xi-\eta)t}\right)dt. \tag{2.63}$$

## §4. 一般的奇性边值问题

利用 Hadamard 函数，自然可以解决奇性边值问题. 但是，我们由 EPD 方程的 Poisson 表达式出发，也能求出问题（$a$)和（$b$）的解.

### 1.奇性边值问题的解

在poisson公式

$$u(\xi,\ \eta)=\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1}(1-z)^{\beta-1}dz$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz,$$

$$0<\beta+\beta'<1,$$

或

$$u(\xi,\ \eta)=(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi}\psi(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}dt$$

$$+\int_{\eta}^{\xi}\varphi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt. \tag{2.64}$$

中令 $\xi=\eta$，则对于问题（$a$）有

$$\psi(\xi)=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\tau(\xi).$$

代入到 (2.64) 中，再令 $\eta=0$，得到

$$\nu(\xi)=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\xi^{1-\beta-\beta'}\int_0^{\xi}\tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}t^{\beta-1}dt$$

$$+\int_0^\xi \psi(t)(\xi-t)^{-\beta}t^{-\beta'}dt.$$

记

$$f(\xi)=\nu(\xi)-\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}\xi^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_0^\xi \tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}t^{\beta-1}dt,$$

则

$$\int_0^\xi \frac{\varphi(t)t^{-\beta'}}{(\xi-t)^\beta}dt=f(\xi). \tag{2.65}$$

这是关于$\varphi$的Abel积分方程，易于求出它的反演公式。

将（2.65）中的$\xi$改为$\zeta$，用$(\xi-\zeta)^{\beta-1}$乘以等式两端，再对$\zeta$由0到$\xi$积分，得到

$$\int_0^\xi(\xi-\zeta)^{\beta-1}\int_0^\zeta\frac{\varphi(t)t^{-\beta'}}{(\zeta-t)^\beta}dtd\zeta$$

$$=\int_0^\xi\frac{f(\zeta)}{(\xi-\zeta)^{1-\beta}}d\zeta.$$

上式左端用Dirichlet公式交换积分次序，并作变量代换$\zeta=\xi+(t-\xi)s$，变为

$$\int_0^\xi\varphi(t)t^{-\beta'}\int_t^\xi(\xi-\zeta)^{\beta-1}(\zeta-t)^{-\beta}d\zeta dt$$

$$=\int_0^\xi\varphi(t)t^{-\beta'}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{-\beta}dsdt$$

$$=B(1-\beta,\ \beta)\int_0^\xi\varphi(t)t^{-\beta'}dt.$$

对$\xi$微分一次，并注意到$f(0)=\nu(0)-\tau(0)=0$，立即得

$$\varphi(\xi)=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\xi^{\beta'}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi\frac{f(t)}{(\xi-t)^{1-\beta}}dt=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\xi^{\beta'}$$

$$\times\int_0^\xi\frac{f'(t)}{(\xi-t)^{1-\beta}}dt.$$

将$f'(t)$的表达式代入，得到

$$\varphi(\xi)=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\xi^{\beta'}\int_0^\xi(\xi-t)^{\beta-1}\Big\{\nu'(t)-\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}$$

$$\times\frac{d}{dt}\Big(t^{1-\beta-\beta'}\int_0^t\tau(t_1)(t-t_1)^{\beta'-1}t_1^{\beta-1}dt_1\Big)\Big\}dt.$$

而

$$\times\frac{d}{dt}[t^{1-\beta-\beta'}\int_0^t\tau(t)(t-t_1)^{\beta'-1}t_1^{\beta-1}dt_1]$$

$$=\frac{d}{dt}\int_0^1\tau(tz)(1-z)^{\beta'-1}z^{\beta-1}dz$$

$$=\int_0^1\tau'(tz)(1-z)^{\beta'-1}z^{\beta}dz$$

$$=\int_0^t\tau'(t_1)(t-t_1)^{\beta'-1}t_1^{\beta}t^{-\beta-\beta'}dt_1.$$

所以

$$\varphi(\xi)=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\xi^{\beta'}\int_0^\xi(\xi-t)^{\beta-1}\Big\{\nu'(t)$$

$$-\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}t^{-\beta-\beta'}\int_0^t\tau'(t_1)$$

$$\times(t-t_1)^{\beta'-1}t_1^{\beta}dt_1\Big\}dt.$$

上式右端第二项还可进一步化简．交换积分次序

$$\xi^{\beta'}\int_0^{\xi}(\xi-t)^{\beta-1}t^{-\beta-\beta'}\int_0^t\tau'(t_1)(t-t_1)^{\beta'-1}t_1^{\beta}dt_1dt$$

$$=\xi^{\beta'}\int_0^{\xi}t'(t_1)\,t_1^{\beta}\int_0^{\xi}(\xi-t)^{\beta-1}t^{-\beta-\beta'}(t-t_1)^{\beta'-1}dtdt_1,$$

作复数代换 $t=\xi+(t_1-\xi)s$，$\xi-t=(\xi-t_1)s$，$t-t_1=(\xi-t_1)(1-s)$，

则

$$\xi^{\beta'}\int_{t_1}^{\xi}(\xi-t)^{\beta-1}t^{-\beta-\beta'}(t-t_1)^{\beta'-1}dt$$

$$=\xi^{-\beta}(\xi-t_1)^{\beta'+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\beta'-1}$$

$$\times\left(1-\frac{\xi-t_1}{\xi}s\right)^{-\beta-\beta'}ds$$

$$=I.$$

利用超几何函数的积分表达式

$$F(a,\ b,\ c,\ z)$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}ds$$

和

$$F(a,\ c,\ c,\ z)=(1-z)^{-a},$$

得到

$$I\equiv\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta+\beta')}\xi^{-\beta_1}(\xi-t_1)^{\beta+\beta'-1}\left(1-\frac{\xi-t_1}{\xi}\right)^{-\beta}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta+\beta')}(\xi-t_1)^{\beta+\beta'-1}t_1^{-\beta}.$$

因此

$$\varphi(\xi)=\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\xi^{\beta'}\int_0^{\xi}\nu'(t_1)(\xi-t_1)^{\beta-1}dt_1$$

$$-\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^{\xi}\tau'(t_1)(\xi-t_1)^{\beta+\beta'-1}dt_1.$$

从而问题（$a$）的解为

$$u(\xi,\ \eta)=\frac{1}{B(\beta,\ \beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_{\eta}^{\xi}\tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}dt$$

$$-\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}$$

$$\times\int_0^t\tau'(t_1)(t-t_1)^{\beta+\beta'-1}dt_1dt$$

$$+\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}$$

$$\times\int_0^t\nu'(t_1)(t-t_1)^{\beta-1}dt_1dt$$

$$=I_1-\frac{\sin\beta\pi}{\pi}I_2+\frac{\sin\beta\pi}{\pi}I_3.$$

我们化简这一表达式，首先

$$I_2=\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}$$

$$\times\int_0^t\tau'(t_1)(t-t_1)^{\beta+\beta'-1}dt_1dt$$

$$=\int_{\eta}^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}\Big[\int_0^{\eta}\tau'(t_1)(t-t_1)^{\beta+\beta'-1}dt_1$$

$$+\int_\eta^t \tau'(t_1)(t-t_1)^{\beta+\beta'-1}dt_1]dt$$

$$=\int_0^\eta \tau'(t)\int_\eta^\xi (t-\eta)^{-\beta'}(\xi-t)^{-\beta}(t-t_1)^{\beta+\beta'-1}dtdt_1$$

$$+\int_\eta^\xi \tau'(t)\int_{t_1}^\xi (t-t_1)^{\beta+\beta'-1}(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dtdt_1.$$

在上式右端两个里面的积分中分别作代换:

$$t=\xi-(\xi-\eta)s,\quad t=\xi-(\xi-t_1)s,$$

则得

$$I_2=\int_0^\eta \tau'(t)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t_1}\right)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta'}$$

$$\times\left(1-\frac{\xi-\eta}{\xi-t_1}s\right)^{\beta+\beta'-1}dsdt_1+\int_\eta^\xi \tau'(t_1)\left(\frac{\xi-t}{\xi-\eta}\right)^{\beta'}$$

$$\times\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{\beta+\beta'-1}\left(1-\frac{\xi-t_1}{\xi-\eta}s\right)^{-\beta'}dsdt_1$$

$$=B(1-\beta,1-\beta')\int_0^\eta \tau'(t_1)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t_1}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta-\beta',2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi-t_1}\right)dt_1$$

$$+B(1-\beta,\ \beta+\beta')\int_\eta^\xi \tau'(t_1)\left(\frac{\xi-t_1}{\xi-\eta}\right)^{\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ \beta',\ 1+\beta,\ \frac{\xi-t_1}{\xi-\eta}\right)dt_1$$

$$=B(1-\beta,1-\beta')F(1-\beta,1-\beta-\beta',2-\beta-\beta',1)\tau(\eta)$$

$$-B(1-\beta,\ 1-\beta')$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta-\beta',2-\beta-\beta',\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}\tau(0)$$

$$-B(1-\beta,\ \beta+\beta')F(1-\beta,\ \beta',\ 1+\beta',\ 1)$$

$$-B(1-\beta,\ 1-\beta')\int_0^\eta \tau(t_1)\ \frac{d}{dt_1}\left[\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)^{1-\beta-\beta'}\right.$$

$$\left.\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi-t_1}\right)\right]dt_1$$

$$-B(1-\beta,\beta+\beta')\int_\eta^\xi \tau(t_1)\ \frac{d}{dt_1}\left[\left(\frac{\xi-t_1}{\xi-\eta}\right)^{\beta'}\right.$$

$$\left.\times F\left(1-\beta,\ \beta',\ 1+\beta',\ \frac{\xi-t_1}{\xi-\eta}\right)\right]dt_1.$$

利用公式

$$\frac{d}{dz}(z^bF(a,\ b,\ c,\ z))=bz^{b-1}F\ (a,b+1,\ \ c,\ \ z),$$

并注意到

$$B(1-\beta,\ 1-\beta')F(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ 1)$$
$$=B(1-\beta,\ \beta+\beta')F(1-\beta,\ \beta',\ 1+\beta',\ 1)$$
$$=\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta),$$

$\left(\text{因为}F(a,\ b,\ c,\ 1)=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right)$，就有

$$I_2=-B\ (1-\beta,\ 1-\beta')\tau(0)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left((1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)$$

$$-\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(1-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_0^\eta \tau(t_1)(\xi-t_1)^{\beta'-1}(\eta-t_1)^{\beta-1}dt_1$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_\eta^\xi \tau(t_1)(\xi-t_1)^{\beta'-1}(t_1-\eta)^{\beta-1}dt_1.$$

其次，

$$I_3=\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}\int_0^t \nu'(t_1)(t-t_1)^{\beta-1}dt_1dt$$

$$=\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}\Big[\Big(\int_0^\eta$$

$$+\int_\eta^t\Big)(\nu' t_1)(t-t_1)^{\beta-1}dt_1\Big]dt$$

$$=\int_0^\eta \nu'(t_1)\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}dtdt_1$$

$$+\int_\eta^\xi \nu'(t_1)\int_{t1}^\xi(\xi-t)^{-\beta}t^{\beta'}(t-t_1)^{\beta-1}dtdt_1$$

$$=-\nu(0)\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta+\beta'-1}$$

$$\times dt+\nu(\xi)B(1-\beta,\ \beta)\xi^{\beta'}(\xi-\eta)^{-\beta'}$$

$$+(\beta-1)\int_0^\eta \nu(t_1)\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}(t-t_1)^{\beta-2}dtdt_1$$

$$-\int_\eta^\xi \nu(t_1)\frac{d}{dt_1}\int_{t1}^\xi(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}(t-t_1)^{\beta-1}dtdt_1$$

$$=-\nu(0)\Big(\frac{\xi-\eta}{\xi}\Big)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta, 1-\beta-\beta', 2-\beta-\beta', \frac{\xi-\eta}{\xi}\right)$$

$$+\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\nu(\xi)\xi^{\beta'}(\xi-\eta)^{-\beta'}+I_3'-I_3''.$$

在$I_3'$中，里面积分的被积函数虽然是四个因子相乘，但其指数相加为－2，在变换 $t=\dfrac{\xi\eta}{(\xi-\eta)s+\eta}$下，可以化为超几何函数。此时

$$\xi-t=\frac{\xi(\xi-\eta)s}{(\xi-\eta)s+\eta},\quad t-\eta=\frac{\eta(\xi-\eta)(1-s)}{(\xi-\eta)s+\eta},$$

$$t-t_1=\frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)s+\eta}\left[1-\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}s\right],$$

$$dt=-\frac{\xi\eta(\xi-\eta)}{[(\xi-\eta)s+\eta]^2}ds,$$

$$I_3'=(\beta-1)\int_0^\eta\nu(t_1)\int_\eta^\xi(\xi-t)^{-\beta}$$

$$\times(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}(t-t_1)^{\beta-2}dtdt_1$$

$$=(\beta-1)\int_0^\eta\nu(t_1)(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\xi^{\beta'-\beta+1}\eta^{\beta-1}(\xi-t_1)^{\beta-2}$$

$$\times\int_0^1(1-s)^{-\beta'}\left[1-\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}s\right]^{\beta-2}dsdt_1$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta'}\xi^{\beta'-\beta+1}\eta^{-1}$$

$$\times\int_0^\eta\nu(t_1)(\xi-t_1)^{-2}t_1{}^{\beta}\left\{(\beta-1)\left[\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\right]^{-\beta}\right.$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 2-\beta,\ 2-\beta-\beta',\ \frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\right)\Big\}dt_1$$

$$=-\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta'}\xi^{\beta'-\beta+1}\eta^{-1}$$

$$\times\int_0^\eta \nu(t_1)(\xi-t_1)^{-2}t_1{}^\beta\frac{d}{dz}[z^{1-\beta}$$

$$\times F(1-\beta,1-\beta,\ 2-\beta-\beta')]_{z=\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}}\ dt$$

$$=-\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}$$

$$\times\int_0^\eta \nu(t_1)t_1{}^\beta\frac{d}{dt_1}\Big\{\Big(\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\Big)^{1-\beta}$$

$$\times F\Big[1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-\beta-\beta',\ \frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\Big]\Big\}dt_1$$

$$=-\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\nu(\eta)\eta^\beta$$

$$\times F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-\beta-\beta',\ 1)$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\xi^{\beta'-1}\eta^{\beta-1}$$

$$\times\int_0^\eta\Big[\nu'(t_1)+\frac{\beta}{t_1}\nu(t_1)\Big]\quad t_1(\xi-t_1)^{\beta-1}$$

$$\times F\Big[1-\beta,1-\beta,2-\beta-\beta',\ \frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\Big]dt_1$$

$$=-\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta')}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\eta^\beta\nu(\eta)$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta-1}\int_0^\eta\left[\nu'(t_1)+\frac{\beta}{t_1}\nu(t_1)\right]t_1(\xi-t_1)^{\beta-1}$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta,2-\beta-\beta',\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\right)dt_1.$$

再计算$I_3''$.

$$I_3''=\int_\eta^\xi\nu(t_1)\frac{d}{dt_1}\int_{t_1}^\xi(\xi-t_1)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}t^{\beta'}(t-t_1)^{\beta-1}dtdt_1,$$

先作代换 $t=\xi(1-s)+t_1s$, 此时

$$\xi-t=(\xi-t_1)s,\quad t-t_1=(\xi-t_1)(1-s),$$

$$t-\eta=\xi-\eta-(\xi-t_1)s,$$

$$I_3''=-\beta'\eta\int_\eta^\xi\nu(t_1)\int_0^1 s^{1-\beta}(1-s)^{\beta-1}[\xi-\eta-(\xi-t_1)s]^{-\beta'-1}$$

$$\times[\xi-(\xi-t_1)s]^{\beta'-1}dsdt.$$

现在，再仿前面一样作变换，将里面的积分化为超几何函数。令

$$s=\frac{\xi\zeta}{(\xi-t_1)\zeta+t_1},\text{ 则有}$$

$$1-s=\frac{t_1(1-\zeta)}{(\xi-t_1)\zeta+t_1},\quad\xi-(\xi-t_1)s=\frac{\xi t_1}{(\xi-t_1)\zeta+t_1},$$

$$\xi-\eta-(\xi-t_1)s=\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\zeta+t_1}\left(1-\frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\zeta\right),$$

$$ds=\frac{\xi t_1}{[(\xi-t_1)\zeta+t_1]^2}d\zeta.$$

因此,

$$I_3''=-\beta'\eta\int_\eta^\xi\nu(t_1)(\xi-\eta)^{-\beta'-1}\xi^{1+\beta'-\beta}t_1^{\beta-2}$$

$$\times\int_0^1 \xi^{1-\beta}(1-\zeta)^{\beta-1}\left[1-\frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\zeta\right]^{-\beta'-1}d\xi dt_1$$

$$=-\Gamma(2-\beta)\Gamma(\beta)\beta'(\xi-\eta)^{-\beta'-1}\xi^{1-\beta+\beta'}$$

$$\times\eta\int_\eta^\xi \nu(t_1)t_1^{\beta-2}F\left[2-\beta,1+\beta',2,\frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\right]dt_1$$

$$=-\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)(\xi-\eta)^{-\beta'-1}\xi^{1-\beta+\beta'}$$

$$\eta\int_\eta^\xi \nu(t_1)t_1^{\beta-1}\frac{d}{dz}F(1-\beta,\beta',1,z)\Big|_{z=\frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}}dt_1$$

$$=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_\eta^\beta \nu(t_1)t_1^\beta\frac{d}{dt}$$

$$\times F\left[1-\beta,\beta',1,\frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\right]dt_1$$

$$=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'}\nu(\xi)-\frac{\pi}{\sin\beta\pi}(\xi-\eta)^{-\beta'}$$

$$\xi^{\beta'-\beta}\eta^\beta\nu(\eta)F(1-\beta,\beta',1,1)$$

$$-\frac{\pi}{\sin\beta\pi}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_\eta^\xi\left[\nu'(t_1)+\frac{\beta}{t_1}\nu(t_1)\right]t_1^\beta$$

$$\times F\left[1-\beta,\beta',1,\frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\right]dt_1.$$

总起来，有

$$I_3=-\nu(0)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta-\beta',2-\beta-\beta',\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)$$

$$\times B(1-\beta,1-\beta')+\frac{\pi}{\sin\beta\pi}$$

$$\times\nu(\xi)\xi^{\beta'}(\xi-\eta)^{-\beta'}+I_3'-I_3''$$

$$= -\nu(0)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ \ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi}\right)$$

$$\times B(1-\beta,\ \ 1-\beta')+\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\nu(\xi)\xi^{-\beta'}(\xi-\eta)^{-\beta'}$$

$$-\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta')}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta}\nu(\eta)$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta'-\beta}\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta-1}$$

$$\times\int_0^{\eta}\left[\nu'(t_1)+\frac{B}{t_1}\nu(t_1)\right]t_1(\xi-t_1)^{\beta-1}$$

$$\times F\left(1-\beta',\ 1-\beta,\ 2-\beta-\beta',\ \frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\right)dt_1$$

$$-\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\nu(\xi)(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'}$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta')}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta}\nu(\eta)$$

$$+\frac{\pi}{\sin\beta\pi}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_{\eta}^{\xi}\left[\nu'(t_1)+\frac{\beta}{t_1}\nu(t_1)\right]$$

$$\times t_1^{\beta}F\left[1-\beta,\ \beta',\ \ 1,\ \frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\right]dt_1$$

$$= -\nu(0)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ \ 1-\beta-\beta',\ \ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi}\right)$$

$$\times B(1-\beta,\ 1-\beta')+\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2-\beta-\beta')}$$

$$\times(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta-1}\int_0^\eta\left[\nu'(t_1)+\frac{\beta}{t_1}\nu(t_1)\right]t_1$$

$$\times(\xi-t_1)^{\beta-1}F\left[1-\beta,1-\beta,2-\beta-\beta',\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\right]dt_1$$

$$+\frac{\pi}{\sin\beta\pi}(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_\eta^\xi\left[\nu'(t_1)+\frac{B}{t_1}\nu(t_1)\right]$$

$$\times t_1^{\beta}F\left(1-\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\right)dt.$$

最后，我们得到

$$u(\xi,\ \eta)=I_1-\frac{\sin\beta\pi}{\pi}I_2+\frac{\sin\beta\pi}{\pi}I_3$$

$$=\frac{1}{B(\beta,\ \beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_\eta^\xi\tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}dt$$

$$+\frac{B(1-\beta,\ 1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}\tau(0)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_0^\eta\tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt$$

$$-\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_{\eta}^{\xi}\tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}dt$$

$$-\frac{B(1-\beta,\ 1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}\nu(0)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta-1}$$

$$\times\int_{0}^{\eta}\left[\nu'(t_1)+\frac{\beta}{t_1}\nu(t_1)\right]t_1$$

$$\times(\xi-t_1)^{\beta-1}F\left[1-\beta,\ 1-\beta,2-\beta-\beta',\frac{(\xi-\eta)t_1}{(\xi-t_1)\eta}\right]dt_1$$

$$+(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_{\eta}^{\xi}\left[\nu'(t_1)+\frac{\beta}{t_1}\nu(t_1)\right]$$

$$\times t_1^{\beta}F\left[1-\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{(\xi-t_1)\eta}{(\xi-\eta)t_1}\right]dt_1$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_{0}^{\eta}\tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\eta^{\beta-1}$$

$$\times\int_{0}^{\eta}\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]t(\xi-t)^{\beta-1}$$

$$\times F\left[1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-\beta-\beta',\ \frac{(\xi-\eta)t}{(\xi-t)\eta}\right]dt$$

$$+(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_\eta^\xi\left[\nu'(t)+\frac{\beta}{t}\nu(t)\right]$$

$$\times t^\beta F\left(1-\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{(\xi-t)\eta}{(\xi-\eta)t}\right)dt. \qquad (2.66)$$

当$\beta=\beta'$时，(2.66) 与 (2.53) 一致；而当$\beta\neq\beta'$且$\beta'-\beta<1$时，(2.66) 与 (2.62) 一致。(2.66) 也可以写为

$$u(\xi,\ \eta)=\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}\int_0^\eta\tau(t)\frac{d}{dt}$$

$$\times\left[\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)^{1-\beta-\beta'}F\left(1-\beta,1-\beta-\beta',2-\beta-\beta'\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)\right]dt$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{-\beta}\xi^{\beta'-\beta}$$

$$\times\int_0^\eta\nu(t)t^\beta\frac{d}{dt}\left[\frac{(\xi-\eta)t}{(\xi-t)\eta}\right]^{1-\beta}$$

$$\times F\left[1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-\beta-\beta',\ \frac{(\xi-\eta)t}{(\xi-t)\eta}\right]dt$$

$$+(\xi-\eta)^{-\beta'}\xi^{\beta'-\beta}\int_\eta^\xi\nu(t)t\beta\frac{d}{dt}$$

$$\times\left[F\left(1-\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{(\xi-t)\eta}{(\xi-\eta)t}\right)\right]dt. \qquad (2.66)'$$

对于问题（$b$）也可以进行类似的讨论。

**2.极值原理**

考虑问题（$a$）的特殊情形：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0<\beta, \beta'<1,\ \beta+\beta'<1, \\
u(\xi,\ \xi)=\tau(\xi),\quad \tau(0)=0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0\leqslant\xi\leqslant A. \\
u(\xi,\ 0)=\nu(\xi)=0,
\end{cases}
\tag{2.67}
$$

在$\beta=\beta'=\dfrac{1}{6}$时，P Germain和R. Rader[17] 证明了这个问题具有极值原理，并用于混合型方程的 Tricomi 问题的讨论。邱佩璋和凌岭[27]推广到$0<\beta, \beta'<1$的情形。利用上段得到的解的表达式，这个结果是显然的。

由 (2.66) 或由 (2.62) 得到 (2.67) 的解为

$$
u(\xi,\ \eta)=\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\beta')}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}
$$

$$
\int_0^\eta \tau(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt
$$

$$
=\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}\int_0^\eta \tau(t)\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)^{1-\beta-\beta'}\right.
$$

$$
\left.\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)\right]dt. \tag{2.68}
$$

不难验证，它的确满足定解条件。当$\eta=0$时，显然有$u(\xi,0)=0$。为验证其满足另一定解条件，先将 (2.68)分部积分，得到

$$u(\xi,\ \eta)=\tau(\eta)-\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}$$

$$\times\int_0^\eta \tau'(t)\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)dt$$

当$\xi-\eta\to 0$时，积分号下的被积函数为零，所以$u(\xi,\xi)=\tau(\xi)$。

由（2.68）就可以证明极值原理：问题（2.67）的解，只有当$\xi=\eta$时，才能达到正的极大和负的极小．因为当$\tau(\xi)\geqslant 0$时，$u(\xi,\ \eta)\geqslant 0$，当$\tau(\xi)=1$时，对应的解$u_1(\xi,\ \eta)$为

$$u(\xi,\ \eta)=1-\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}\left(\frac{\xi-\eta}{\xi}\right)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi}\right).$$

因而$0\leqslant u_1(\xi,\ \eta)\leqslant 1$。但是$\max\limits_{0\leqslant\xi\leqslant A}\tau(\xi)\geqslant 0$，$\min\limits_{0\leqslant\xi\leqslant A}\tau(\xi)\leqslant 0$

（$\because\tau(0)=0$）。

由此推出

$$u(\xi,\ \eta)\leqslant\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}\int_0^\eta \max\tau(t)$$

$$\times\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)^{1-\beta-\beta'}\right.$$

$$\left.\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)\right]dt$$

$$=\max_{0\leqslant\xi\leqslant A}\tau(\xi)u_1(\xi,\ \eta)\leqslant\max_{0\leqslant\xi\leqslant A}\tau(\xi)=\max_{0\leqslant\xi\leqslant A}u(\xi,\ \xi).$$

同样

$$u(\xi,\eta)\geqslant\frac{\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta-\beta')}\int_0^\eta\min\tau(t)$$

$$\times\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)^{1-\beta-\beta'}\right.$$

$$\left.\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta-\beta',\ 2-\beta-\beta',\ \frac{\xi-\eta}{\xi-t}\right)\right]dt$$

$$=\min_{0\leqslant\xi\leqslant A}\tau(\xi)u_1(\xi,\eta)\geqslant\min_{0\leqslant\xi\leqslant A}\tau(\xi)$$

$$=\min_{0\leqslant\xi\leqslant A}u(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\eta}\quad(\because\min_{0\leqslant\xi\leqslant A}\tau(\xi)\leqslant 0).$$

所以，我们有

$$\min_{0\leqslant\xi\leqslant A}u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=\xi}\leqslant u(\xi,\eta)\leqslant\max_{0\leqslant\xi\leqslant A}u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=\xi}.$$

从而证明了极值原理。

**3.一般情形**

奇性边值问题可以推广到β，β′为一般实数的情形。当 $\begin{matrix}\beta\\ \beta'\end{matrix}<1$，$1-\beta-\beta'>0$ 时，可以提问题：

$$(a)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0,\\ u(\xi,\xi)=\tau(\xi), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \tau(0)=\nu(0).\\ u(\xi,0)=\nu(\xi),\end{cases}$$

此时，根据对β，β′的假设，$E(\beta,\beta')$的一般解为

$$u(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C_{[1-\beta]}^{k}C_{[1-\beta']}^{l}$$

$$\times\frac{(-1)^{k}\Gamma(\beta+\beta'+[1+\beta]+[1+\beta'])}{\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta]+[1-\beta']-k-e)}$$

$$\times(\xi-\eta)^{[1-\beta]+[1-\beta']-k-l}\int_0^1\psi^{([1-\beta]+[1-\beta']-k-l)}$$

$$\times[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'+[1-\beta']+[1-\beta]-k-1}$$

$$\times(1-z)^{\beta+[1-\beta]+[1-\beta']-l-1}dz$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]\,z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz,$$

$$\text{当}\ \beta+\beta'\neq-1,\ -2,\ -3,\ \cdots, \tag{2.69}$$

或

$$u(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C_{[1-\beta]}^{k}C_{[1-\beta']}^{l}(-1)^{l-1}$$

$$\times(k+l-1)!\,(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'-k-l}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(1-\beta-\beta'-k-l)}[\xi(1-z)+\eta z]z^{-\beta-k}$$

$$\times(1-z)^{-\beta'-l}dz-\sum_{k=1}^{[1-\beta]}C_{[1-\beta]}^{k}(k-1)!\,(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'-k}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(1-\beta-\beta'-k)}[\xi(1-z)+\eta z]$$

$$\times z^{-\beta-k}(1-z)^{-\beta'}dz+(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_0^1\psi^{(1-\beta-\beta')}[\xi(1-z)+\eta z]$$

$$\times z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}\mathrm{Ln}[(\xi-\eta)z(1-z)]dz$$

$$+(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)+\eta z]$$

$$\times z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz$$

当 $\beta+\beta'\neq-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$. (2.70)

令 $\eta=\xi$，得到

$$\psi(\xi)=(-1)^{[1-\beta]}\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}\tau(\xi),$$

或

$$\psi(\xi)=(-1)^{[1-\beta']-1}\tau(\xi)/([1-\beta]+[1-\beta']-1)!$$
$$\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+(1-\beta']).$$

将 $\psi$ 的值代入 (2.62) 或 (2.63)，再令 $\eta=0$，即得

$$\nu(\xi)=\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C^k_{[1-\beta]}C^l_{[1-\beta']}$$

$$\times(-1)^{[1-\beta]-k}\Gamma(\beta+\beta')\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta]+[1-\beta']$$
$$/\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta]$$
$$+[1-\beta']-k-l)$$

$$\times\int_0^1\tau^{([1-\beta)+[1-\beta']-k-l)}[\xi(1-z)]$$

$$\times z^{\beta'+[1-\beta']+[1-\beta)-k-1}(1-z)^{\beta+[1-\beta]+[1-\beta']-l-1}dz$$

$$+\xi^{1-\beta-\beta'}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz,$$

(2.71)

或者

$$\nu(\xi)=\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C^k_{[1-\beta]}C^l_{[1-\beta']}$$

$$\times\frac{(-1)^{[1-\beta]-l}(k+l-1)!}{([1-\beta]+[1-\beta']-1)!\,\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}$$

$$\times\ \xi^{1-\beta-\beta'-k-l}\int_0^1\tau^{(1-\beta-\beta'-k-l)}[\xi(1-z)]$$

$$\times\ z^{-\beta-k}(1-z)^{-\beta'-l}dz$$

$$+\sum_{k=0}^{[1-\beta]}(-1)^{[1-\beta']}(k-1)!/([1-\beta]+[1-\beta']-1)!$$

$$\times\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])\xi^{1-\beta-\beta'-k}$$

$$\times\int_0^1\tau^{(1-\beta-\beta'-k}[\xi(1-z)]z^{-\beta-k}(1-z)^{-\beta'}dz$$

$$+\frac{(-1)^{[1-\beta']-1}\ \xi^{1-\beta-\beta'}}{([1+\beta]+[1-\beta']-1)!\,\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}$$

$$\times\int_0^1\tau^{(1-\beta-\beta')}[\xi(1-z]z^{-\beta-k}\ (1-z)^{-\beta'}dz+\xi^{1-\beta-\beta'}$$

$$\times\int_0^1\varphi[\xi(1-z)]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz. \qquad (2.71)'$$

为简便起见，令

$$f(\xi)=\nu(\xi)-\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C_{[1-\beta]}^{k}C_{[1-\beta']}^{l}$$

$$\times(-1)^{[1-\beta]-k}\Gamma(\beta+\beta')\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta]+[1-\beta'])$$
$$/\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta]$$
$$+[1-\beta']-k-l)$$

$$\times\xi^{[1-\beta]+[1-\beta']-k-l}\int_0^1\tau^{([1-\beta]+[1-\beta']-k-l)}(\xi(1-z))$$

$$\times z^{\beta'+[1-\beta']+[1-\beta]-k-1}(1-z)^{\beta+[1-\beta]+[1-\beta']-l-1}dz,$$

或

$$f(\xi)=\nu(\xi)-\sum_{k=0}^{[1-\beta]}\sum_{l=0}^{[1-\beta']}C_{[1-\beta]}^{k}C_{[1-\beta']}^{l}$$

$$\times\frac{(-1)^{[1-\beta]-l}(k+l-1)!}{([1-\beta]+[1-\beta']-1)!\,\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}$$

$$\times z^{1-\beta-\beta'-k-l}\int_0^1\tau^{(1-\beta-\beta'-k-l)}[\xi(1-z)]$$

$$\times z^{-\beta-k}(1-z)^{-\beta'-l}dz-\sum_{k=1}^{[1-\beta]}C_{[1-\beta]}^{k}$$

$$\times\frac{(-1)^{[1-\beta]}(k-1)!\,\xi^{1-\beta-\beta'-k}}{([1-\beta]+[1-\beta']-1)!\,\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}$$

$$\times\int_0^1\tau^{(1-\beta-\beta'-k)}[\xi(1-z)]z^{-\beta-k}(1-z)^{-\beta'}dz$$

$$+\frac{(-1)^{[1-\beta']}\xi^{1-\beta-\beta'}}{([1-\beta]+[1-\beta']-1)!\,\Gamma(\beta+[1-\beta])\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}$$

$$\times\int_0^1\tau^{(1-\beta-\beta')}[\xi(1-z)]z^{-\beta}(1-z)^{-\beta'}\mathrm{Ln}[\xi z(1-z)]dz.$$

再作变量代换 $t=\xi(1-z)$，则 (2.71) 和 (2.71)′变为

$$\int_0^\xi\varphi(t)(\xi-t)^{-\beta}t^{-\beta'}dt=f(\xi).$$

上式两端对 $\xi$ 微商 $[1-\beta]$ 次，则得

$$\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta-[1-\beta])}\;\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi f^{([1-\beta])}$$

$$\times(t)(\xi-t)^{\beta+[1-\beta]-1}dt.$$

$\varphi$ 既定出，代入 (2.71) 或 (2.71)′式，即得问题 ( $a$ ) 的解.

当 $\beta$，$\beta'\geqslant0$，而 $1-\beta-\beta'<1$ 时，可提问题:

$$
(b)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta'}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0, \\
\lim\limits_{\xi-\eta\to 0}(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\tau(\xi), \\
u(\xi,\ 0)=\nu(\xi).
\end{cases}
\quad (2.72)
$$

为叙述简便起见，我们只考虑$\beta+\beta'\neq 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$的情形。此时EPD方程的一般解为

$$
u(\xi,\ \eta)=\int_0^1\psi[\xi(1-z)+\eta z]z^{\beta'-1}dz
$$

$$
+\sum_{k=0}^{[\beta]}\sum_{l=0}^{[\beta']}C_{[\beta]}^{k}\,C_{[\beta']}^{l}\frac{(-1)^{l}\Gamma(2+[\beta]+[\beta']-\beta-\beta')}{\Gamma(2+[\beta]+[\beta']-\beta-\beta'-k-l)}
$$

$$
\times(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'+[\beta]+[\beta']-k-l}\int_0^1\varphi^{([\beta]+[\beta']-k-l)}
$$

$$
\times[\xi(1-z)+\eta z]\,z^{[\beta]+[\beta']-\beta-l}(1-z)^{[\beta]+[\beta']-\beta'-k}dz. \quad (2.74)
$$

由条件（2.72）得到

$$
\varphi(\xi)=(-1)^{[\beta']}\frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta+[\beta])\Gamma(1-\beta'+[\beta'])}\tau(\xi).
$$

将$\varphi$的值代入（2.74）式，再令$\eta=0$，即得到

$$
\nu(\xi)=\int_0^1\psi[\xi(1-z)]z^{\beta'-1}(1-z)^{\beta-1}dz+\sum_{k=0}^{[\beta]}\sum_{l=0}^{[\beta']}
$$

$$
\times(-1)^{[\beta']-l}\,\Gamma(1-\beta-\beta')\Gamma(2+[\beta]+[\beta']-\beta-\beta')
$$

$$
/\Gamma(1-\beta+[\beta])\,\Gamma(1-\beta'+[\beta'])\,\Gamma(2+[\beta]+[\beta']-\beta-\beta'-k-l)
$$

$$\times\ \xi^{1-\beta-\beta'+[\beta]+[\beta']-k-l}\int_0^1 \tau^{([\beta]+[\beta']-k-l)}[\xi(1-z)]$$

$$\times z^{[\beta]+[\beta']-\beta-l}(1-z)^{[\beta]+[\beta']-\beta'-k}dz. \qquad (2.75)$$

令

$$f_1(\xi)=\nu(\xi)-\sum_{k=0}^{[\beta]}\sum_{l=0}^{[\beta']}C_{[\beta]}^k\,C_{[\beta']}^l$$

$$(-1)^{[\beta']-l}\Gamma(1-\beta-\beta')\Gamma(2+[\beta]+[\beta']-\beta-\beta')$$
$$/\Gamma(1-\beta+[\beta])\Gamma(1-\beta'+[\beta'])\Gamma(2+[\beta]+[\beta']-\beta-\beta'-k-l)$$

$$\times\ \xi^{1-\beta-\beta'+[\beta]+[\beta']-k-l}\int_0^1 \tau^{([\beta]+[\beta']-k-l)}[\xi(1-z)]$$

$$\times\ z^{[\beta]+[\beta']-\beta-l}(1-z)^{[\beta]+[\beta']-k-\beta'}dz,$$

则 (2.75) 变为

$$\int_0^\xi \varphi(t)(\xi-t)^{\beta'-1}t^{\beta-1}dt=\xi^{\beta+\beta'-1}f_1(\xi).$$

上式两端对 $\xi$ 微商 $[\beta']$ 次，得到

$$\frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta'-[\beta'])}\int_0^\xi \psi(t)(\xi-t)^{\beta'-[\beta']-1}t^{\beta-1}dt$$

$$=\frac{d^{[\beta']}}{d\xi^{[\beta']}}[\xi^{\beta+\beta'-1}f_1(\xi)].$$

这也是一个Abel积分方程，它的解为

$$\psi(\xi)=\frac{\xi^{1-\beta}}{\Gamma(\beta')\Gamma(1+[\beta']-\beta')}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi\frac{d^{[\beta']}}{dt^{[\beta']}}$$

$$\times[t^{\beta+\beta'-1}f_1(t)(\xi-t)^{[\beta']-\beta'}dt.$$

$\varphi$，$\psi$ 既已定出，代入 (2.74) 式即得问题（$b$）的解。

对于问题（$a$），如果取消$\frac{\beta}{\beta'}<1$的限制，则导致一种推广的Abel积分方程。事实上，此时，由于$1-\beta-\beta'>0$，因此除去$\frac{\beta}{\beta'}<1$的情形外，只可能是$\beta$与$\beta'$异号。考虑$\beta\geqslant 1$，$\beta'<0$的情形。

由EPD方程的一解般

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\ \eta)=&\sum_{l=0}^{[1-\beta']} C_{[1-\beta']}^{l}\frac{\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta'])}{\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta']-l)}\\
&\times(\xi-\eta)^{[1-\beta']-l}\int_0^1 \psi^{([1-\beta']-l)}[\xi(1-z)+\eta z]\\
&\times z^{\beta'+[1-\beta']-1}(1-z)^{\beta+[1-\beta]-l-1}dz\\
&+\sum_{k=0}^{[\beta]} C_{[\beta]}^{k}\frac{\Gamma(2+[\beta]-\beta-\beta')}{\Gamma(2+[\beta]-\beta-\beta'-k)}(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'+[\beta]-k}\\
&\times\int_0^1 \varphi^{([\beta]-k)}[\xi(1-z)+\eta z]\,z^{[\beta]-\beta}(1-z)^{[\beta]-\beta'-k}dz
\end{aligned}
$$

出发，得到

$$
\psi(\xi)=\frac{\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}\tau(\xi),
$$

且有

$$
\begin{aligned}
\nu(\xi)-&\sum_{l=0}^{[1-\beta']} C_{[1-\beta']}^{l}\\
&\times\frac{\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta'])\Gamma(\beta+\beta')}{\Gamma(\beta+\beta'+[1-\beta']-l)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta'+[1-\beta'])}\xi^{[1-\beta']-l}\\
&\times\int_0^1 \tau^{([1-\beta']-l)}[\xi(1-z)]z^{\beta'+[1-\beta']-1}
\end{aligned}
$$

$$\times(1-z)^{\beta+[1-\beta']-l-1}dz$$

$$=\sum_{k=0}^{[\beta]}C_{[\beta]}^{k}\frac{\Gamma(2+[\beta]-\beta-\beta')}{\Gamma(2+[\beta]-\beta-\beta'-k)}\xi^{1-\beta-\beta'+[\beta]-k}$$

$$\times\int_0^1\varphi^{([\beta]-k)}[\xi(1-z)]z^{[\beta]-\beta}(1-z)^{[\beta]-\beta'-k}dz. \tag{2.76}$$

令上式左端为 $f(\xi)$，又注意到右端可写为

$$\xi^{1-\beta-\beta'+[\beta]}\int_0^1\varphi[\xi(1-z)]z^{[\beta]-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz,$$

对 $\xi$ 的 $[\beta]$ 次微商，于是得到

$$\frac{d^{[\beta]}}{d\xi^{[\beta]}}\left\{\xi^{1-\beta-\beta'+[\beta]}\int_0^1\psi[\xi(1-z)]\right.$$

$$\left.\times z^{[\beta]-\beta}(1-z)^{-\beta'}dz\right\}=f(\xi). \tag{2.76$'$}$$

或者，令 $\xi(1-z)=t$，则有

$$\frac{d^{[\beta]}}{d\xi^{[\beta]}}\int_0^\xi\frac{\varphi(t)t^{-\beta'}}{(\xi-t)^{\beta-[\beta]}}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma([\beta])}\frac{d^{[\beta]}}{d\xi^{[\beta]}}\int_0^\xi f(t)(\xi-t)^{[\beta-1]}dt. \tag{2.77}$$

而积分方程

$$\int_0^\xi\frac{\varphi(t)t^{-\beta'}}{(\xi-t)^{\beta-[\beta]}}dt=\frac{1}{\Gamma([\beta])}\int_0^\xi f(t)(\xi-t)^{[\beta]-1}dt. \tag{2.77$'$}$$

的解显然就是（2.77）的解。并且在（2.76）′两端令 $\xi=t_1$，再乘以 $(\xi-t_1)^{[\beta]-1}$，对 $t_1$ 从0到 $\xi$ 积分，即化为（2.77）′。因此（2.77）和（2.77）′等价。故（2.77）的解为

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\Gamma([\beta])}\frac{\sin(\beta-[\beta])\pi}{\pi}\xi^{\beta'}$$

$$\times\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi(\xi-t)^{\beta-[\beta]-1}\int_0^t f(t_1)(t-t_1)^{[\beta]-1}dt_1dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma([\beta])}\frac{\sin(\beta-[\beta])\pi}{\pi}\xi^{\beta'}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi f(t_1)$$

$$\times\int_{t_1}^\xi(\xi-t)^{\beta-[\beta]-1}(t-t_1)^{[\beta]-1}dtdt_1$$

$$=\frac{1}{\Gamma([\beta])}\frac{\sin(\beta-[\beta])\pi}{\pi}\xi^{\beta'}\cdot$$

$$\times\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi f(t_1)(\xi-t_1)^{\beta-1}dt_1\frac{\Gamma(\beta-[\beta])\Gamma([\beta])}{\Gamma(\beta)}$$

(令 $t=\xi-(\xi-t)\tau$)

$$=\frac{\sin(\beta-[\beta])\pi}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\beta-[\beta])}{\Gamma(\beta)}\xi^{\beta'}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi f(t_1)(\xi-t_1)dt.$$

## §5. 奇性定解问题

**1.奇性混合问题**

B. A. Fusaro[37]和王传芳[129]讨论了 $\beta=\beta'$ 时 $E(\beta,\beta')$ 的奇性混合问题：

$$\begin{cases}u_{xx}-u_{yy}+\dfrac{2\beta}{y}u_y=0, & 0\leqslant\beta<1,\ 0<x<\pi,\ y>0,\\ u(x,0)=f(x),\ f\in C^2,\ f(0)=f(\pi)=0, & (2.78)\\ \lim\limits_{y\to0}y^{2\beta}u_y(x,y)=g(x),\ g\in C^2,\ g(0)=g(\pi)=0, & \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0. & \end{cases}$$

用变量分离法解这个问题。

设 $u(x,\ y)=X(x)Y(y)$，代入方程得到

$$y''+\frac{2\beta}{y}y'+\lambda^2 y=0,$$

$$X''+\lambda^2 X=0.$$

其中，$\lambda$ 为分离常数。因 $X(x)=A\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x$，由边界条件定出特征值为 $\lambda=1,\ 2,\ \cdots$，特征函数族为 $\{\sin nx\}$，另一方面，方程

$$y''+\frac{2\beta}{y}y'+\lambda^2 Y=0$$

是Bessel方程，其解为

$$\Gamma\left(B+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{ny}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}(ny)$$

和

$$\left(\frac{ny}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\frac{1}{2}-\beta}(ny).$$

将 $f$、$g$ 按正弦展开，设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n\sin nx,\quad \bar{a}_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_n\sin nx,\quad \bar{b}_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nx\,dx.$$

则由于

$$\lim_{y\to 0}\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{ny}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}(ny)=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{ny}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\frac{1}{2}-\beta}(ny)=0,$$

$$\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{ny}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J^{\frac{1}{2}-\beta}(ny)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{n\left(k+\frac{1}{2}-\beta\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}-\beta\right)}\left(\frac{ny}{2}\right)^{2k-2\beta},$$

$$\lim_{y\to 0}y^{2\beta}\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{ny}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\frac{1}{2}-\beta}(ny)\right]$$

$$=\frac{n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\left(\frac{n}{2}\right)^{-2\beta},$$

所以

$$a_n=\bar{a}_n,\quad b_n=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{2\beta-1}\bar{b}_n}{2}.$$

故问题（2.78）的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\left[\bar{a}_n\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\left(\frac{ny}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}(ny)\right.$$

$$\left.+\bar{b}_n\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\left(\frac{2y}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}}{2}J_{\frac{1}{2}-\beta}(ny)\right].\qquad(2.79)$$

如果 $\beta=0$，则由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，$J_{-\frac{1}{2}}(ny)=\sqrt{\frac{2}{\pi ny}}\cos ny$，

$J_{\frac{1}{2}}(ny)=\sqrt{\frac{2}{\pi ny}}\sin ny$，代入得

$$u(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\overline{a_n}\cos ny+\frac{\overline{bn}}{n}\sin ny\right)\sin nx.$$

这就是熟知的弦振动方程混合问题的解。

现在证明（2.77）可以写为封闭形式. 为此，需要利用Bessel函数的一个积分表达式

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z)=\int_0^\pi\cos(z\sin\tau)\cos^{2\nu}\tau d\tau$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin\tau)\cos^{2\nu}\tau d\tau.$$

将其代入（2.77），并将 $f$，$g$ 作为以 $\pi$ 为周期的奇函数开拓出去，得到

$$u(x, y)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\overline{a}_n}{B\left(\frac{1}{2}, \beta\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(ny\sin\tau)\cos^{2\beta-1}\tau d\tau\right.$$

$$+\frac{2\overline{b}_n y^{1-2\beta}}{(1-2\beta)B\left(\frac{1}{2}, 1-\beta\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(ny\sin\tau)$$

$$\left.\times\cos^{1-2\beta}\tau d\tau\right]\sin nx$$

$$=\frac{2}{B\left(\frac{1}{2}, \beta\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\beta-1}\tau\left(\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a}_n\sin nx\cos nys\right)d\tau$$

$$+\frac{2y^{1-2\beta}}{(1-2\beta)B\left(\frac{1}{2},1-\beta\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1-2\beta}\tau$$

$$\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b}_n \sin nx \cos nys\right)d\tau.$$

其中 $s=\sin\tau$. 由三角函数关系式

$$2\sin nx\cos nys=\sin n(x+sy)+\sin n(x-sy),$$

得到

$$u(x,\ y)=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\ \beta\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\beta-1}\tau\left[\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a}_n(\sin n(x+sy)\right.$$

$$\left.+\sin(x-sy))\right]d\tau+\frac{y^{1-2\beta}}{(1-2\beta)B\left(\frac{1}{2},1-\beta\right)}$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1-2\beta}\tau\left[\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b}_n(\sin n(x+sy)+\sin(x-sy))\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\ \beta\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\beta-1}\tau[f(x+sy)+f(x-sy)]d\tau$$

$$+\frac{y^{1-2\beta}}{(1-2\beta)B\left(\frac{1}{2},\ 1-\beta\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1-2\beta}\tau$$

$$\times[g(x+sy)+g(x-sy)]d\tau$$

$$=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\ \beta\right)}\int_0^1[f(x+ty)+f(x-ty)](1-t^2)^{\beta-1}dt$$

$$+\frac{y^{1-2\beta}}{(1-2\beta)\beta\left(\frac{1}{2},\ 1-\beta\right)}\int_0^1[g(x+ty)$$

$$+g(x-ty)](1-t^2)^{-\beta}dt.$$

这和Poisson表达式一致。

**2.广义辐射问题**

最后，简要地讨论一下A. Weinstein[30]和J. Lion[31]讨论的EPD方程的广义辐射问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{2\beta}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ u(x,\ y)=0 \quad \text{在区域}x\geqslant y\text{外}, \\ u(x,\ 0)=\tau(x), \quad (\text{当}x<0\text{时}, \ \tau(x)=0). \end{cases} \tag{2.80}$$

在问题（2.80）中，$u(x,\ y)$的定义域是在$x>y$内，而$u(x,\ x)=0$，所以（2.80）实际上是一个特殊的奇性边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{2\beta}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ u(x,\ x)=0, \\ u(x,\ 0)=\tau(x), \ (\text{当}x<0\text{时}, \ \tau(x)=0). \end{cases}$$

或者，令$\xi=x+y$，$\eta=x-y$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\beta}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0, \\ u(\xi,\ \xi)=\tau(\xi), \ \tau(0)=0, \\ u(\xi,\ 0)=0. \end{cases}$$

因此，当$\beta>0$时，有解

$$u(\xi,\ \eta)=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}(\xi-\eta)^{1-2\beta}$$

$$\times\int_0^{\eta}\tau(t)(\xi-t)^{\beta-1}(t-\eta)^{\beta-1}dt.$$

回到变量$x$，$y$，得到

$$u(x,\ y)=\frac{\Gamma(1-\beta)2^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}y^{1-2\beta}$$

$$\times\int_0^{x-y}\tau(t)[(x-t)^2-y^2]^{\beta-1}dt$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta)2^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}y^{1-2\beta}\int_y^{x}\tau(x-z)(z^2-y^2)^{\beta-1}dz.$$

如果考虑到$x\leqslant 0$时，$\tau(x)=0$，则上式还可以写为

$$u(x,\ y)=\frac{\Gamma(1-\beta)2^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}$$

$$\times y^{1-2\beta}\int_y^{\infty}\tau(x-z)(z^2-y^2)^{\beta-1}dz.$$

注　迄今为止，我们讨论的EPD方程的各种定解问题中，数据至少有一部分是给在奇线$\xi=\eta$上的，即是所谓的奇性定解问题，这当然反映了奇性方程的特点，但是EPD方程的正则定解问题最近也引起人们的兴趣。另外，近年来，由于对Treves方程（0.19）的研究，由（0.19）的Cauchy问题，经过特征变换就化为一类特殊的EPD方程的所谓广义奇性第三边值问题，从EPD方程出发，也得到一系列结果，由于篇幅所限，这里也不作详细介绍。

# 第三章　椭圆型EPD方程

考虑方程

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{a}{y}u_y+\frac{b}{y^2}u=0. \tag{3.1}$$

其中 $a$、$b$ 是常数. 它可以认为是 EPD 方程当 $\beta=\beta'$ 时所对应的椭圆型方程. 因此，称它为椭圆型 EPD 方程. 和双曲型 EPD 方程不同，它是在 Tricomi 提出混合型方程以后才引起人们注意并进而进行研究的.

本章首先研究方程 (3.1) 在某些变换下的不变性，然后求出其超几何方程特解，以不同的方法导出 (3.1) 的基本解，同时，当 $\beta=\beta'$ 时，我们又导出了椭圆EPD方程的基本解. 在 § 4 中研究了两类奇性定解问题. 最后，从高维laplace方程的轴对称解导入广义轴对称位势，阐明方程 (3.1) 和 Laplace 方程的联系.

本章的主要内容来自Tricomi[15]，Holmgren[49]，Gellerstedt[34]，Франклъ[50]，Germain和Bader[17]，Weinstein[46, 47]，Каролъ[51]，M. M. Смирнов[52]等人的文章. 其中，特别重要的是Tricomi，Gevmain和Bader，Gellerstedt和Weinstein 的工作，他们对方程 (3.1) 的研究比较系统，并在某一方程有独到的见解.

## §1. 基本性质

**1.对方程**（3.1）**作变换**

$$u(x, y)=y^{\lambda}v(x, y) \tag{3.2}$$

其中λ待定．则方程（3.1）变为

$$y^{\lambda}\left\{v_{xx}+v_{yy}+\frac{a+2\lambda}{y}v_y+\frac{\lambda(\lambda-1)+\lambda a+b}{y^2}v\right\}=0 \quad (3.1)'$$

（3.1）′与（3.1）是同类型方程，即在变换（3.2）下方程不变．特别，我们可选取λ，使得$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$，从而（3.1）′不具有未知函数项．因此，不失一般性，只须讨论方程

$$u_{xx}+v_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y=0 \qquad \beta=\text{const}. \tag{3.3}$$

即可．这里，将$a$写为$2\beta$，是为了便于和双曲型 EPD 方程对比起见．方程

$$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$$

称为（3.1）的指数方程．对于方程（3.3），指数方程为

$$\lambda^2+(2\beta-1)\lambda=0.$$

它的两个根分别为$\lambda_1=0$和$\lambda_2=1-2\beta$．因此，如果$u(x, y, \beta)$是（3.3）的解，则$y^{1-2\beta}u(x, y, 1-\beta)$也是解，即成立如下关系式

$$u(x, y, \beta)=y^{1-2\beta}u(x, y, 1-\beta). \tag{3.4}$$

**2.对微分算子$\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}$的不变性**

将（3.3）对$y$微商，则$u_y$满足方程

$$(u_y)_{xx}+(u_y)_{yy}+\frac{2\beta}{y}(u_y)_y-\frac{2\beta}{y^2}(u_y)=0$$

作乘子变换 $v = y^{-1}u_y$，则方程变为

$$v_{xx} + v_{yy} + \frac{2(\beta+1)}{y}v_y = 0.$$

即有

$$\frac{1}{y}\frac{\partial u(x,\ y,\ \beta)}{\partial y} = u(x,\ y,\ \beta+1). \tag{3.5}$$

**3.方程（3.3）在某些变数变换下的不变性**

对于双曲型EPD方程，在自变数的分式线性变换

$$\xi' = \frac{\lambda\xi+\mu}{\lambda_1\xi+\mu_1},\qquad \eta' = \frac{\lambda\eta+\mu}{\lambda_1\eta+\mu_1}. \tag{3.6}$$

下不变，而（3.6）又可分解为三个变换：1°.平移变换 $\xi' = \xi + \mu$，$\eta' = \eta + \mu$。2°.同位相似变换 $\xi = \lambda\xi, \eta' = \lambda\eta$。3°.反演变换 $\xi' = \frac{1}{\xi}$，$\eta' = \frac{1}{\eta}$。相应地，（3.3）在下列三种变换下不变：

1°.沿 $x$ 轴方向的位移变换 $x' = x + \mu$，$y' = y$。

2°.同位相似变换 $x' = \lambda x$，$y' = \lambda y$。

3°.反演变换 $r' = \frac{1}{r}\left(r^2 = \sqrt{x^2+y^2},\ r'^2 = \sqrt{x'^2+y'^2}\right)$。

对于1°,2°,是显然的，只须验证3°。

引入极坐标 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}$。由于

$$u_x = u_r\frac{x}{r} - u_\theta\frac{y}{r^2},\quad u_y = u_r\frac{y}{r} + u_\theta\frac{x}{r^2}$$

$$u_{xx} = u_{\theta\theta}\frac{y^2}{r^4} - 2u_{r\theta}\frac{xy}{r^3} + 2u_\theta\frac{xy}{r^4} + u_r\frac{y^2}{r^3} + u_{rr}\frac{x^2}{r^2},$$

$$u_{yy}=u_{\theta\theta}\frac{x^2}{r^4}+2u_{r\theta}\frac{xy}{r^3}-2u_\theta\frac{xy}{r^4}+u_r\frac{x^2}{r^3}+u_{rr}\frac{y^2}{r^2},$$

原方程化为

$$u_{rr}+\frac{1+2\beta}{r}u_r+\frac{2\beta}{r^2}\mathrm{ctg}\theta\cdot u_\theta+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0. \qquad (3.7)$$

在反演变换$r'=\frac{1}{r}$之下，由

$$u_r=-r'^2u_{r'},\qquad u_{rr}=r'^4u_{r'r'}+2r'^3u_{r'},$$

得到

$$r'^4\left\{u_{r'r'}+\frac{1-2\beta}{r'}u_{r'}+\frac{2\beta}{r'^2}\mathrm{ctg}\theta\cdot u_\theta+\frac{1}{r'^2}u_{\theta\theta}\right\}=0,$$

这仍然是同一类型的方程．不仅如此，再作乘子变换

$$V(r',\ \theta)=r'^{1-2\beta}u(r',\ \theta).$$

由

$$u_{r'}=r'^{2\beta}v_{r'}+2\beta r'^{2\beta-1}v,$$
$$u_{r'r'}=r'^{2\beta}v_{r'r'}+4\beta r'^{2\beta-1}v_{r'}+2\beta(2\beta-1)r'^{2\beta-2}v,$$

得到

$$r'^{2\beta}\left\{v_{r'r'}+\frac{1+2\beta}{r'}v_{r'}+\frac{2\beta}{r'^2}\mathrm{ctg}\theta\cdot v_\theta+\frac{1}{r'^2}v_{\theta\theta}\right\}=0.$$

这就是说，在变换$v\left(\frac{1}{r},\ \theta\right)=r^{2\beta}u\left(\frac{1}{r},\ \theta\right)$下方 程 不 变，即 $u\left(\frac{1}{r},\ \theta\right)=r^{-2\beta}v\left(\frac{1}{r},\ \theta\right)$．这表明如$u(r,\theta)$是方程的解，则$r^{-2\beta}u\left(\frac{1}{r},\ \theta\right)$也是方程的解．

将变换1°，2°，3°结合起来，则得如下结果：方 程（3.3）

的解，对任一圆心在 $x$ 轴上的圆周进行反演的结果是成群的（我们把垂直于 $x$ 轴的直线看作是半径为无穷的圆周），而这种反演变换在非欧几何的观点看来相当于欧氏几何中的“刚体运动”——即平移、旋转，因为它将“直线”（半圆周）变为直线（半圆周）。

直接写出变换的一般表达式，则有

$$x'=\frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+c^2y^2},$$

$$y'=\frac{(bc-ad)y}{(cx+d)^2+c^2y^2},\quad (bc-ad\neq 0) \tag{3.8}$$

这就是与双曲型EPD方程的变换

$$\xi'=\frac{a\xi+b}{c\xi+d},\quad \eta'=\frac{a\eta+b}{c\eta+d}$$

相对应的变换。

方程在（3.8）下的不变性就是说，如 $u(x,\ y)$ 是（3.3）的解，则

$$[(cx+d)^2+c^2y^2]^{-\beta}$$

$$\times u\left(\frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+c^2y^2},\ \frac{(bc-ad)y}{(cx+d^2)+c^2y^2}\right)$$

也是解。即由一个解可以导出含三个参数的解族

## §2. 方程的超几何函数特解

双曲型EPD方程具有超几何函数的特解，由此导出了Riemann函数和Hadamard函数。因此，对于椭圆型EPD方程而言，

求其超几何函数的特解也是极其重要的。

我们从方程（3.7）出发，求变量分离的特解。令 $u(r,\theta)=R(r)T(\theta)$，则

$$R''(r)T(\theta)+\frac{1+2\beta}{r}R'(r)T(\theta)+\frac{2\beta}{r^2}\mathrm{ctg}\theta\cdot R(r)T'(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta)=0$$

或者

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+(1+2\beta)r\frac{R'(r)}{R(r)}+2\beta\mathrm{ctg}\theta\cdot\frac{T'(\theta)}{T(\theta)}+\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=0.$$

因此，$R(r)$满足方程

$$r^2R''+(1+2\beta)R'\cdot r+\alpha^2R=0,\quad \alpha=\mathrm{const}.$$

这是一个Euler方程，它应有形如$R=r^k$的解，代入方程得 $k$ 与 $\alpha$ 的关系

$$-\alpha^2=k(k+2\beta).$$

从而，$T$所满足的方程为

$$T''+2\beta\mathrm{ctg}\theta\cdot T'+k(k+2\beta)T=0. \tag{3.9}$$

令 $t=\cos^2\frac{\theta}{2}$，则

$$T_\theta=-T_t\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2}\sin\theta\cdot T_t,$$

$$T_{\theta\theta}=\frac{1}{4}\sin^2\theta T_{tt}-\frac{1}{2}\cos\theta\cdot T_t.$$

（3.9）变为

$$\frac{1}{4}(1-\cos^2\theta)T_{tt}-\frac{1}{2}\cos\theta\cdot(1+2\beta)T_t+k(k+2\beta)T=0.$$

因为$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=2t-1$，$1-\cos^2\theta=1-(2t-1)^2=4t(1-t)$，

所以

$$t(1-t)T_{tt}+\left[\frac{1}{2}+\beta-(1+2\beta)t\right]T_t+k(k+2\beta)T=0. \tag{3.10}$$

这正是超几何方程

$$t(1-t)T_{tt}+[c-(a+b+1)t]T_t-abT=0.$$

当$c=\dfrac{1}{2}+\beta$，$b=k+2\beta$，$a=-k$的情形. 因此，超几何函数$F\left(-k,\ k+2\beta,\ \dfrac{1}{2}+\beta,\ t\right)$就是(3.10)的一个解. 故而，方程(3.7)有一特解

$$r^kF\left(-k,\ k+2\beta,\ \frac{1}{2}+\beta,\ t\right).$$

其中，$k$是任意常数. 以上方法是属于Tricomi的.

方程(3.9)还可通过其它变换化为超几何方程. 关于超几何函数，有所谓Kummer关系式，即若$a$，$b$，$c$满足关系式$c=\dfrac{a+b+c}{2}$时，有

$$F\left(a,\ b,\ \frac{a+b+1}{2},\ t\right)$$

$$=F\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{a+b+1}{2},4t(1-t)\right).$$

因此，如令

$$t'=4t(1-t)=\frac{(r+x)(r-x)}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^2}=\frac{y^2}{r^2}=\sin^2\theta,$$

方程（3.9）同样可以化为超几何方程。事实上，

$$T_\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot T_t',$$

$$T_{\theta\theta} = 4\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot T_{t't'} + 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)T_{t'}.$$

（3.9）化为

$$4t'(1-t')T_t{}'_t{}' + 2(1-2t')T_t' + 4\beta(1-t')T_{t'} + k(k+2\beta)T = 0,$$

即

$$t'(1-t')Tt'_t{}' + \left[\frac{1}{2}+\beta-(1+\beta)t'\right]T_t' + \frac{k(k+2\beta)}{4}T = 0.$$

它是 $c=\frac{1}{2}+\beta$，$a=-\frac{k}{2}$，$b=\frac{k}{2}+\beta$ 的超几何方程，因此，方程（3.7）有一对特解

$$r^k F\left(-\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}+\beta,\ \frac{1}{2}+\beta,\ \frac{y^2}{r^2}\right),$$

$$y^{-2\beta}r^{k+2\beta-1}F\left(\frac{1}{2}-\beta-\frac{k}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{k}{2},\ \frac{3}{2}-\beta,\ \frac{y^2}{r^2}\right).$$

这是Germain和Bader当 $\beta=\frac{1}{6}$ 时所求出的。取 $k=-s-\beta$，由超几何方程在奇点0，1，∞附近的基本解系可得三对特解

$$[1] = r^{-\beta-s-1}F\left(\frac{1+\beta-s}{2},\ \frac{1+\beta+s}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{x^2}{r^2}\right),$$

$$[1]' = r^{-\beta-s}F\left(\frac{\beta+s}{2},\ \frac{\beta-s}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{x^2}{r^2}\right);$$

$$[2] = r^{-\beta-s}F\left(\frac{\beta+s}{2},\ \frac{\beta-s}{2},\ \frac{2\beta+1}{2},\ \frac{y^2}{r^2}\right),$$

$$[2]' = y^{1-2\beta} r^{\beta+s} F\left(\frac{1-\beta+s}{2}, \frac{1-\beta-s}{2}, \frac{3-2\beta}{2}, \frac{y^2}{r^2}\right);$$

$$[3] = y^{-\beta-s} F\left(\frac{\beta+s}{2}, \frac{1-\beta+s}{2}, 1+s, \frac{r^2}{y^2}\right),$$

$$[3]' = y^{-\beta-s} r^{-2s} F\left(\frac{\beta-s}{2}, \frac{1-\beta-s}{2}, 1-s, \frac{r^2}{y^2}\right).$$

或者，再利用公式

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, z),$$

将[3]，[3]′表为

$$[3] = x(-y^2)^{-\frac{1+\beta+s}{2}} F\left(1-\frac{\beta-s}{2}, \frac{1+\beta+s}{2}, 1+s, \frac{r^2}{y^2}\right),$$

$$[3]' = xr^{-2s}(-y^2)^{-\frac{1+\beta+s}{2}} F\left(1-\frac{\beta+s}{2}, \frac{1+\beta-s}{2}, 1-s, \frac{r^2}{y^2}\right).$$

## §3. 基 本 解

虽然我们可以用不同的方法求出椭圆型EPD方程的各种各样的特解，但是，最重要的是要求出它的基本解。本节，我们用不同的方法求出椭圆型EPD方程的基本解，并研究它们简单的性质。

所谓基本解，应满足下列条件：

1）两点$M_0(x_0, y_0)$和$M(x, y)$的函数，关于$M_0$点满足原

方程，关于$M$点满足（3.3）的共轭方程

$$v_{xx}+v_{yy}-\frac{2\beta}{y}v_y+\frac{2\beta}{y^2}v=0 \quad . \tag{3.10}$$

2）当$M\to M_0$时，具有对数奇性。

3）它的某种线积分等于一个确定的常数。

不难算出，共轭方程（3.10）的指数方程为

$\lambda^2-(1+2\beta)\lambda+2\beta=0$

因此，如令$v=y^{2\beta}W$，则（3.10）可化为（3.3）。从而原方程的解乘上$y^{2\beta}$即满足共轭方程。

**可以有多种方法求出方程（3.3）的基本解、**

**1.从基本解与Riemann函数的关系出发**

由于Riemann函数是基本解的对数部分的系数，而EPD方程的R-函数是已经知道的，因此，可以由后者出发求基本解。

引入复变量$\xi=x+iy$，$\eta=x-iy$，则方程（3.3）化为

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0$$

其$R$-函数为

$$\frac{(\xi-\eta)^{2\beta}}{(\xi-\eta_0)^\beta(\xi-\eta)^\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 1,\ \frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}\right)$$

回到原来变数$x$，$y$，注意

$$\begin{aligned}
&(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)\\
&=(x_0+iy-x-iy)(x-iy-x_0+iy_0)\\
&=[-(x-x_0)-i(y-y_0)][(x-x_0)-i(y-y_0)]\\
&=-[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)\\
&=(x+iy-x_0+iy_0)(x_0+iy_0-x+iy)\\
&=[(x-x_0)+i(y+y_0)][-(x-x_0)+i(y+y_0)]
\end{aligned}$$

$$= -[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]$$

$$(\xi-\eta)^2=(2iy)^2=-4y^2$$

则 R-函数为

$$\frac{(2y)^{2\beta}}{r_1^{2\beta}}F\left(\beta,\ \beta,\ 1,\ \frac{r^2}{r_1^2}\right). \tag{3.11}$$

其中，

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2,\ r_1^2=(x-x_0)^2+(y+y_0)^2. \quad (3.11)$$

关于$M$点满足共轭方程，而函数

$$r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 1,\ \frac{r^2}{r_1^2}\right)$$

关于两点$M(x,\ y)$和$M_0(x_0,\ y_0)$都满足方程（3.3）.

根据这一事实，如求方程（3.3）形如$W(x,\ y;x_0,\ y_0)=r_1^{-2\beta}W\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)=r_1^{-2\beta}W(\sigma)$的解，其中$\sigma=\frac{r^2}{r_1^2}$，则$W(\sigma)$应满足超几何方程. 兹验证如下：

$$\sigma_x=\frac{2(x-x_0)}{r_1^2}-\frac{2r^2(x-x_0)}{r_1^4},$$

$$\sigma_y=\frac{2(y-y_0)}{r_1^2}-\frac{2r^2(y+y_0)}{r_1^4},$$

$$\sigma_{xx}=\frac{2}{r_1^2}-\frac{8(x-x_0)^2}{r_1^4}-\frac{2r^2}{r_1^4}+\frac{8r^2(x-x_0)^2}{r_1^6},$$

$$\sigma_{yy}=\frac{2}{r_1^2}-\frac{8(y-y_0)^2}{r_1^4}-\frac{2r^2}{r_1^4}+\frac{8r^2(y+y_0)^2}{r_1^6},$$

$$(r_1^{-2\beta})_x=-2\beta(x-x_0)r_1^{-2\beta-2},$$

$$(r_1^{-2\beta})_y=-2\beta(y+y_0)r_1^{-2\beta-2},$$

$$(r_1^{-2\beta})_{xx}=-2\beta r_1^{-2\beta-2}+4\beta(\beta+1)(x-x_0)^2r_1^{-2\beta-4},$$

$$(r_1^{-2\beta})_{yy} = -2\beta r_1^{-2\beta-2} + 4\beta(\beta+1)(y+y_0)^2 r_1^{-2\beta-4},$$

$$W_x = r_1^{-2\beta} W'(\sigma)\sigma_x - 2\beta r_1^{-2\beta-2}(x-x_0)W(\sigma),$$

$$W_{xx} = r_1^{-2\beta} W''(\sigma)\sigma_x^2 + r_1^{-2\beta} W'(\sigma)\sigma_{xx} - 4\beta r_1^{-2\beta-2}$$
$$\times (x-x_0)W'(\sigma)\sigma_x + 4\beta(\beta+1)r_1^{-2\beta-4}(x-x_0)^2$$
$$\times W(\sigma) - 2\beta r_1^{-2\beta-2}W(\sigma),$$

$$W_y = r_1^{-2\beta} W'(\sigma)\sigma_y - 2\beta r_1^{-2\beta-2}(y+y_0)W(\sigma),$$

$$W_{yy} = r_1^{-2\beta} W''(\sigma)\sigma_y^2 - r_1^{-2\beta}\sigma_{yy} - 4\beta r_1^{-2\beta-2}(y+y_0)$$
$$\times W'(\sigma)\sigma_y + 4\beta(\beta+1)r_1^{-2\beta-4}(y+y_0)^2 W(\sigma)$$
$$-2\beta r_1^{-2\beta-2}W(\sigma).$$

如果$W$满足（3.3），则$W(\sigma)$满足如下方程

$$(\sigma_x^2+\sigma_y^2)W''(\sigma) + \Big\{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\frac{2\beta}{y}\sigma_y - \frac{4\beta}{r_1^2}$$
$$\times [(x-x_0)\sigma_x + (y-y_0)\sigma_y\Big\}\ W'(\sigma) + \frac{4\beta}{r_1^2}$$
$$\times\Big\{-1+\frac{(\beta+1)(x-x_0)^2}{r_1^2}+\frac{(\beta+1)(y+y_0)^2}{r_1^2}$$
$$-\frac{\beta(y+y_0)}{y}\Big\}W(\sigma)=0.$$

将各项的系数算出（注意$r_1^2-r^2=4yy_0$）

$$\frac{1}{4}(\sigma_x^2+\sigma_y^2) = \frac{(x-x_0)^2}{r_1^8}(r_1^2-r^2)^2+\frac{1}{r_1^8}$$
$$[r_1^2(y-y_0)-r^2(y+y_0)]^2$$
$$=\frac{(x-x_0)^2}{r_1^8}(r_1^2-r^2)^2+\frac{1}{r_1^8}$$
$$\times[r_1^2(y-y_0)-r^2(y-y_0)-2y_0r^2]^2$$

$$= \frac{r^2}{r_1^8}(r_1^2 - r^2)^2 - \frac{4y_0(y - y_0)r^2(r_1^2 - r^2)}{r_1^8} + \frac{4y_0^2 r^4}{r_1^8}$$

$$= \frac{r^2}{r_1^8}(r_1^2 - r^2)^2 - \frac{4y_0 y r^2(r_1^2 - r^2)}{r_1^8} + \frac{4y_0^2 r^2}{r_1^6}$$

$$= \frac{4y_0^2 r^2}{r_1^6}$$

$$= \frac{r^2(r_1^2 - r^2)^2}{4r_1^6 y^2}$$

$$= \frac{1}{4y^2}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right)^2$$

$$= \frac{\sigma(1 - \sigma)^2}{4y^2}.$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{4}{r_1^2} - \frac{4r^2}{r_1^4} + \frac{8r^2}{r_1^4} - \frac{8}{r_1^4}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

$$= \frac{4}{r_1^2} + \frac{4r^2}{r_1^4} - \frac{8}{r_1^4}(r^2 + 2yy_0 - 2y_0^2)$$

$$= \frac{4}{r_1^2} + \frac{4r^2}{r_1^4} - \frac{8}{r_1^4}\left(r^2 + \frac{r_1^2 - r^2}{2} - 2y_0^2\right)$$

$$= \frac{4}{r_1^2} + \frac{4r^2}{r_1^4} - \frac{4(r^2 + r_1^2)}{r_1^4} + \frac{16y_0^2}{r_1^4}$$

$$= \frac{16y_0^2}{r_1^4} = \frac{(r_1^2 - r^2)^2}{y^2 r_1^4} = \frac{1}{y^2}\left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right)^2 = \frac{(1 - \sigma)^2}{y^2}.$$

$$\frac{2\beta}{y}\sigma_y = \frac{4\beta}{yr_1^2}[y - y_0 - \sigma(y + y_0)]$$

$$= \frac{4\beta}{r_1^2}(1 - \sigma) + \frac{4\beta y_0}{yr_1^2}(1 + \sigma)$$

$$=\frac{4\beta}{r_1^2}(1-\sigma)-\frac{\beta}{y^2}(1+\sigma)(1-\sigma)$$

$$-\frac{4\beta}{r^2}[(x-x_0)\sigma_x+(y-y_0)\sigma_y]$$

$$=\frac{-8\beta}{r_1^2}\left\{\frac{(x-x_0)^2}{r_1^2}\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r_1^2}\left[(y^2-y_0^2)-\frac{r^2(y+y_0)^2}{r_1^2}\right]\right\}$$

$$=-\frac{8\beta}{r_1^2}\left(\frac{r^2}{r_1^2}-\frac{r^2}{r_1^4}r_1^2+\frac{2yy_0}{r_1^2}-\frac{2y_0^2}{r_1^2}\right)$$

$$=-\frac{8\beta}{r_1^2}\left(\frac{r_1^2-r^2}{2r_1^2}-\frac{16y_0^2y^2}{8y^2r_1^2}\right)$$

$$=-\frac{4\beta}{r_1^2}\left[1-\sigma-\frac{r_1^2}{4y^2}(1-\sigma)^2\right]$$

$$=\frac{\beta}{y^2}(1-\sigma)^2-\frac{4\beta}{r_1^2}(1-\sigma).$$

这样，得$W'(\sigma)$的系数为

$$\frac{1-\sigma}{y^2}[1-\sigma+\beta(1-\sigma)-\beta(1+\sigma)]$$

$$=\frac{1-\sigma}{y^2}[1-(1+2\beta)\sigma].$$

而且不难看出，$W(\sigma)$的系数应为

$$-\frac{4\beta}{r_1^2}+\frac{4\beta(\beta+1)}{r_1^4}r_1^2-\frac{4\beta^2}{r_1^2}-\frac{4\beta^2yy_0}{y^2r_0^2}=-\frac{\beta^2}{y^2}(1-\sigma).$$

因此，$W$满足如下方程

$$\frac{1-\sigma}{y^2}\{\sigma(1-\sigma)W''+[1-(1+2\beta)\sigma]W'-\beta^2 W\}=0. \tag{3.12}$$

这就是 $a=b=\beta$，$c=1$ 的超几何方程，有解 $F(\beta,\ \beta,\ 1,\ \sigma)$。

现在，我们已不难得出方程（3.3）的以 $R$-函数（3.11）的对数部分系数的特解。事实上，对于超几何方程（3.12），由于 $c=1$，与超几何函数 $F(\beta,\beta,1,\sigma)$ 相对应的另一独立解是

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}(\beta,\ \beta,\ 1,\ \sigma)\\&=F(\beta,\ \beta,\ 1,\ \sigma)\ln\sigma\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}2\left[\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}-\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}\right]\frac{(\beta)_n{}^2}{(n!)^2}\sigma^n.\end{aligned} \tag{3.13}$$

当 $M\to M_0$ 时，$\sigma\to 0$，$\mathscr{F}(\beta,\ \beta,\ 1,\ \sigma)$ 有对数奇性。而 $\mathscr{F}$ 乘上因子 $(2y)^{2\beta}r_1{}^{-2\beta}$ 时，关于 $(x,\ y)$ 满足共轭方程（3.10）。关于 $(x_0,\ y_0)$ 满足（3.3）。因此就是基本解。

以上方法是Tvicomi[15]首先提出的，但他未能求出基本解的具体表达式，而是后来由E. Holmgren[49]，Ф.И.Франкль[50]实现的。

**2.直接由超几何方程求基本解**

既然我们已经导出 $W(\sigma)$ 满足的超几何方程（3.12），可以考虑由它的特解来构造基本解。

方程（3.12）在奇点 $\sigma=1$ 附近有两个独立的解

$F(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ 1-\sigma)$，

$(1-\sigma)^{1-2\beta}F(1-\beta,\ 1-\beta,2-2\beta,1-\sigma)$。

由于三个参数之间有关系

$c-a-b=2\beta-\beta-\beta=(2-2\beta)-(1-\beta)-(1-\beta)=0$.

所以在$\sigma=0$附近有

$$F(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ 1-\sigma)$$

$$=F(\beta,\beta,1,\sigma)\left(-\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\right)\ln\sigma-\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}2\left[\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}-\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}\right]\frac{(\beta)_n^2}{(n!)^2}\sigma^n. \quad (3.14)$$

同样，由于对$F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ 1-\sigma)$也有类似的关系式，注意到$1-\sigma=\dfrac{4yy_0}{r_1^2}$，则我们可以取

$$\begin{cases} k_1 y^{2\beta} r_1^{-2\beta} F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta, \dfrac{4yy_0}{r_1^2}\right)=q_1(x,\ y;\ x_0,\ y_0), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.15) \\ k_2 y y_0^{1-2\beta} r_1^{2\beta-2} F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,\ \dfrac{4yy_0}{r_1^2}\right) \\ =q_2(x,\ y;\ x_0,\ y_0). \end{cases}$$

作为基本解，其中$k_1$，$k_2$为常数，待以后确定。由关系式(3.14)不难看出基本解（3.15）与（3.13）的关系。事实上，一般而言，成立着等式

$$\mathscr{F}(a,\ b,\ 1,\ \sigma)=-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}F(a,b,a+b,1-\sigma).$$

因此，这两种形式的基本解，实质上是完全一样的，只不过选用（3.15），表成通常的超几何函数形式，使用更方便些。

（3.15）是Gellerstedt，而后为Kapou，M. M. Смцриов等人所采用的。

**3. 由超几何函数特解出发，利用变换群导出基本解**

Germain和Bader仿照双曲型的 EPD 方程，由超几何特解出发，利用分式线性变换导出$R$-函数的方法，由特解〔1—3〕中导出基本解。

对方程（3.3）的特解〔3〕

$$y^{-\beta-s}F\left(\frac{s+\beta}{2},\ \frac{1+s-\beta}{2},\ 1+s,\ \frac{r^2}{y^2}\right)$$

施行如下变换：以$A(-R,\ 0)$为极点，以$2R^2$为幂作反演，然后再沿轴线$x=0$作对称变换．这个变换用解析式子写出来就是

$$r_A'=\sqrt{(x'+R)^2+y'^2},\quad r_A=\sqrt{(x+R)^2+y^2}$$

或

$$y'=2R^2\frac{y}{r_A'},\qquad x'+R=2R^2\frac{x+R}{r_A'}.$$

然后对$y$轴进行对称变换

$$x_1'=-2R^2\frac{x+R}{r_A'}+R$$

$$=\frac{R}{r_A^2}(r^2+2xR+R^2-2xR-2R^2)$$

$$=\frac{r^2-R^2}{r_A^2}R,\quad (r^2=x^2+y^2).$$

这样

$$r'^2=x_1'^2+y'^2=\frac{R^2}{r_A^4}[(r^2-R^2)+4y^2R^2]$$

$$=\frac{R^4}{r_A^4}[r^4-2x^2R^2-2y^2R^2+R^4+4y^2R^2]$$

$$=\frac{R^2}{r_A^4}[r^4+R^4+2x^2R^2+2y^2R^2-4x^2R^2]$$

$$= \frac{R^2}{r_A^4}[(r^2+R^2)^2-(2xR)^2]$$

$$= \frac{R^2}{r_A^4}\cdot r_A^2\cdot r_B^2 = \frac{R^2 r_B^2}{r_A^2}.$$

其中

$$r_B^2 = r^2-2xR+R^2=(x-R)^2+y^2.$$

所以$\frac{r^2}{y^2}$变为

$$\frac{r'^2}{y'^2}=\frac{R^2 r_B^2\cdot r_A^4}{r_A^2\cdot 4y^2R^4}=\frac{r_A^2 r_B^2}{4R^2y^2}.$$

〔3〕变为

$$y^{-\beta-s}(2R)^{-\beta-s}r_A^{2s}$$

$$\times F\left(\frac{s+\beta}{2},\ \frac{1+s-\beta}{2},\ 1+s,\ \frac{r_A^2 r_B^2}{4R^2y^2}\right).$$

特别取$R^2=-y_0^2$，则

$$r_A^2 r_B^2=(r^2-R^2)^2+4R^2y^2=(r^2+y_0^2)^2-4y^2y_0^2$$
$$=r^2r_1^2=[x^2+(y-y_0)^2][x^2+(y+y_0)^2]$$

是实的。如再令$s=0$，则得一个实解如下

$$y^{-\beta}y_0^{-\beta}F\left(\frac{\beta}{2},\ \frac{1-\beta}{2},\ 1,\ \frac{r^2r_1^2}{-4y^2y_0^2}\right) \tag{3.16}$$

再利用Kummer 公式，取$t=\frac{r_1^2}{4yy_0}$，则有

$$4t(1-t)=4\ \frac{x^2+(y+y_0)^2}{4yy_0}\left[\frac{4yy_0-x^2-(y+y_0)^2}{4yy_0}\right]$$

$$=\frac{r^2 r_1^2}{-4y^2 y_0^2}.$$

得到如下的解

$$y^{-\beta}y_0^{-\beta}F\left(\beta,\ 1-\beta,\ 1,\ \frac{r_1^2}{4yy_0}\right).$$

从而方程（3.3）有关于变量$\dfrac{r_1^2}{4yy_0}$的倒数的解

$$r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right),$$

$$y^{1-2\beta}y_0^{1-2\beta}r_1^{2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right).$$

对这两个解作平移变换，将$x$代以$x-x_0$。然后再乘以因子$y^{2\beta}$，就得到基本解（3.15）的表达式。

注 Germain和Bader是对解〔2〕

$$r^{-\beta-s}F\left(\frac{s+\beta}{2},\ \frac{\beta-s}{2},\ \frac{1}{2}+\beta,\ \frac{y^2}{r^2}\right)$$

施行上述变换而导出基本解（3.16）的，这样做的方便之处是：超几何函数前的因子中不出现$y_0$，事实上，解〔2〕变为

$$r_A^{-2\beta}\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^{-s-\beta}F\left(\frac{\beta+s}{2},\ \frac{\beta-s}{2},\ \frac{1}{2}+\beta,\ \frac{4y^2R^2}{r_A^2 r_B^2}\right),$$

取$s=0$，$R^2=-y_0^2$，则得

$$r_1^{-\beta}r^{-\beta}F\left(\frac{\beta}{2},\ \frac{\beta}{2},\ \frac{1}{2}+\beta,\ \frac{-4y^2y_0^2}{r_1^2r^2}\right).$$

而（3.16）则是上述解关于变数为倒数的解。

**4. β ≠ β′时的基本解**

我们考虑更一般的椭圆EPD方程

$$u_{xx}+v_{yy}+\frac{2a}{y}u_x+\frac{2b}{y}u_y=0. \tag{3.17}$$

讨论它的基本解.

关于（3.17）的基本解，目前尚未看到有关的资料．这里，我们运用 I 中的技巧，从它所对应的$R$-函数出发，寻求基本解．仿 I，引入复变量 $\xi=x+iy$，$\eta=x-iy$，则（3.17）变为

$$u_{\xi\eta}-\frac{b-ai}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{b+ai}{\xi-\eta}u_\eta=0. \tag{3.17$'$}$$

不难看出（3.17）′的$R$-函数为

$$\frac{(\xi-\eta)^{2b}}{(\xi-\eta_0)^{b-ai}(\xi_0-\eta)^{b+ai}}\times F\left(b+ai,\ b-ai,\ 1,\ \frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}\right).$$

回到变量$x$，$y$，则有

$$\frac{(2y)^{2b}}{[(y+y_0)-i(x-x_0)]^{b-ai}[(y+y_0)+i(x-x_0)]^{b+ai}}\times F\left(b+ai,\ b-ai,\ 1,\ \frac{r^2}{r_1^2}\right). \tag{3.18}$$

注意到

$$[(y+y_0)-i(x-x_0)]^{b-ai}[(y+y_0)+i(x-x_0)]^{a+ai}=r_1^{2b}e^{-2a\theta},$$

其中

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{x-x_0}{y+y_0},\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

利用超几何函数的幂级数展式，立刻可见（3.18）是实函数．不难验证（3.18）关于$M(x, y)$满足（3.17）的共轭方程，而关于$M_0(x_0, y_0)$满足（3.17），又由于$F\left(b+ai, b-ai, 1, \frac{r^2}{r_1^2}\right)$

关于$M$和$M_0$是对称的，故

$$r_1^{-2b}e^{-2a\theta}F\left(b+ai,\ b-ai,\ 1,\ \frac{r^2}{r_1^2}\right)$$

关于$M$满足（3.17）．于是，仿I可考虑（3.17）的具如下形式的解

$$W(x, y)=r_1^{-2b}e^{-2a\theta}W(\sigma),\quad \sigma=\left(\frac{r}{r_1}\right)^2.$$

经过类似I中的计算和同样技巧可得（3.17）的两个基本解为

$$\left\{\begin{aligned}&v_1(x,\ y;\ x_0,\ y_0)\\&=k_1\left(\frac{y}{r_1}\right)^{-2b}e^{2a\theta}\ F\left(b+ai,\ b-ai,\ 2b,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right),\\&v_2(x,\ y;\ x_0,\ y_0)\\&=k_2 y y_0^{1-2b}r_1^{-2b-2}e^{2a\theta}\\&\times F\left(1-b-ai,\ 1-b+ai,\ 2-2b,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right).\end{aligned}\right. \tag{3.19}$$

下面，我们转入讨论基本解（3.15）的其它性质．首先我们要指出一个重要事实：基本解（3.15）就是Hadamard函数．事实上，方程$E(\beta,\ \beta')$的$H$-函数为

$$
\begin{cases}
H_a(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0) \\
=\dfrac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}(\xi-\eta) \\
\quad\times(\xi_0-\eta_0)^{1-2\beta}(\xi_0-\xi)^{\beta-1}(\eta_0-\eta)^{\beta-1} \\
\quad\times F\left[1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \dfrac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}\right], \\
H_b(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0) \\
=\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}(\xi-\eta)^{2\beta} \\
\quad\times(\xi_0-\xi)^{-\beta}(\eta_0-\eta)^{-\beta}F\left[\beta,\beta,2\beta,\ \dfrac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi-\eta)}\right].
\end{cases}
$$

已知

$$
\xi-\eta=2iy,\quad \xi_0-\eta_0=2iy_0,
$$

$$
(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)=(x+iy-x_0+iy_0)(x+iy_0-x+iy)=-r_1^2,
$$

$$
\frac{(\xi-\eta)(\xi_0-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}=\frac{4yy_0}{r_1^2}.
$$

因此，除去一个常数因子外，$H_a$就是$q_2$，$H_b$就是$q_1$。由此，我们就可得出当$\beta>0$时，$q_1$和$q_2$当$y\to0$时分别满足条件

$$
\lim_{y\to0}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}-\frac{2\beta}{y}q_1\right)=0, \tag{3.20}
$$

$$
q_2\Big|_{y=0}=0,\ \lim_{y\to0}\left(\frac{\partial q_2}{\partial y}-\frac{2\beta}{y}q_2\right)=0(1). \tag{3.21}
$$

事实上，

$$
\frac{\partial q_1}{\partial y}=2\beta k_1y^{2\beta-1}r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)
$$

$$
+k_1y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]
$$

$$=\frac{2\beta}{y}q_1+0(y^{2\beta}).$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial y}=k_2y_0{}^{1-2\beta}r_1{}^{2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$+k_2yy_0{}^{1-2\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left[r_1{}^{2\beta-2}F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,\frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]$$

$$=\frac{q_2}{y}+0(y).$$

基本解的另一个重要性质是下面的定理。

**定理1** 如果$\Gamma$是上半平面$y>0$内一条连续可微的曲线，其端点是$x$轴上的两点$a$，$b$，区域$D$是由$\Gamma$和$x$轴所围成的，则适当选取常数$k_1$，就有

$$\int_\Gamma A_s[q_1]ds=\int_\Gamma\left(q_{1y}-\frac{2\beta}{y}q_1\right)dx-q_{1x}dy$$

$$=\begin{cases}1, & \text{当}(x_0,\ y_0)\in D,\ \text{或}x\text{轴上的内点},\\ \frac{1}{2}, & \text{当}(x_0,\ y_0)\in\Gamma,\\ 0, & \text{当}(x_0,\ y_0)\overline{\in}\overline{D}.\end{cases}\qquad(3.22)$$

**证明**：首先，如果$u$和$v$分别是（3.3）和共轭方程(3.10)的解，则由Green公式

$$\iint_D\left[v\left(u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y\right)-u\left(v_{xx}+v_{yy}-\frac{2\beta}{y}v_y\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\beta}{y^2}v\right)\right]d_xd_y=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(vu_x-uv_x)+\frac{\partial}{\partial y}\left(vu_y-uv_y\right.\right.$$

$$+\frac{\partial\beta}{y}uv\Big)\Big]dxdy=\int_{\partial D}\Big(uv_y-\frac{2\beta}{y}uv-vu_y\Big)dx$$

$$+(vu_x-uv_x)dy=\int_{\partial D}u\left[\Big(v_y-\frac{2\beta}{y}v\Big)dx-v_xdy\right]$$

$$-v(u_ydx-u_xdy)=0.$$

特别取 $u\equiv1$，则对于（3.10）在$D$内的任一正则解$v$均有

$$\int_{\partial D}\Big(v_y-\frac{2\beta}{y}v\Big)dx-v_xdy=0.$$

因此，（1）当$(x_0,\ y_0)$在$D$外时，$q_1$在$D$内处处是正则解。此外，在$x$轴上的积分，如设Γ的两端点为$a$，$b$，则当$y_0\neq0$时，由（3.20）有

$$\int_a^b A_s[q_1]\ ds=\int_a^b\Big(q_{1y}-\frac{2\beta}{y}q_1\Big)dx=0$$

而

$$\int_{\partial D}A_s[q_1]ds=\int_\Gamma A_s[q]ds+\int_a^b A_s[q_1]ds=0,$$

从而证明了当$(x_0,\ y_0)$在$D$外时，

$$\int_\Gamma A_s[q_1]ds=0$$

（2）当$(x_0,\ y_0)\in D$时，以$(x_0,\ y_0)$为心，$\varepsilon$为半径作一小圆$C_\varepsilon$，在$D$中去掉此小圆后的区域记为$D_1$，在$D_1$中$q_1$是正则解，应用Green公式，则有

$$\int_\Gamma A_s[q_1]\ ds+\int_a^b A_s[q_1]ds-\int_{C_\varepsilon}A_s[q_1]ds=0.$$

此时，同样有

$$\int_a^b A_s[q_1]ds=0$$

剩下的仅需计算小圆$C_\varepsilon$上的积分．因为

$$\begin{cases} q_{1y}-\dfrac{2\beta}{y}q_1=k_1y^{2\beta}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \dfrac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right], \\ q_{1x}=k_1y^{2\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \dfrac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]. \end{cases}$$

故有

$$\int_{C_\varepsilon}A_s[q_1]ds=\int_{C_\varepsilon}\left(q_{1y}-\frac{2\beta}{y}q_1\right)dx-q_{1x}dy$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left[\left(q_{1y}-\frac{2\beta}{y}q_1\right)\cos(n,\ y)+q_{1x}\cos(n,\ x)\right]ds$$

$$=-\int_0^{2\pi}k_1y^{2\beta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]\cos(n,\ y)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta,\ \frac{4yy^0}{r_1^2}\right)\right]\cos(n,\ x)\right\}ds$$

$$=-\int_0^{2\pi}k_1y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial n}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]ds$$

$$=-\int_0^{2\pi}k_1y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial r}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]\Bigg|_{r=\varepsilon}\varepsilon d\theta.$$

现在利用关系式（3.14），注意$1-\dfrac{4yy_0}{r_1^2}=\dfrac{r^2}{r_1^2}$，则上式最后一个积分中的超几何函数的微商除$\dfrac{\partial}{\partial r}\ln r^2$一项外，其余的奇性均不超过对数奇性，因此，乘上因子$\varepsilon$后，随着$\varepsilon$趋于零而趋于零．而当$\varepsilon\to0$时，$y\to y_0$，$r_1\to2y_0$，于是

$$\lim_{\varepsilon\to0}-\int_0^{2\pi}k_1y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial r}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]\Bigg|_{r=\varepsilon}\varepsilon d\theta$$

$$= k_1\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left[y^{2\beta}r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\beta,1,\frac{r^2}{r_1^2}\right)\frac{2}{r}\right]\Bigg|_{r=\varepsilon}\varepsilon d\theta$$

$$= k_1\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}2^{1-2\beta}2\pi.$$

因此，取

$$k_1=\frac{2^{2\beta-2}\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$

则

$$\int_\Gamma A_s[q_1]ds=1.$$

（3）$(x_0, y_0)\in\Gamma$，但不是$\Gamma$的端点，即$y_0\neq 0$。因此同样有

$$\int_a^b A_s[q_1]ds=0,$$

同样，作以$(x_0, y_0)$为中心，$\varepsilon$为半径的小圆$C_\varepsilon$，而有

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}A_s[q_1]ds-\int_{C_\varepsilon'}As[q_1]ds=0.$$

其中，$\Gamma_\varepsilon$是$\Gamma$去掉被小圆所截去的那一部分，而$C_\varepsilon'$是$C_\varepsilon$落在$D$内的那部分圆周。当$\varepsilon\to 0$时，显然$C_\varepsilon'$是小圆周的一半，因此

$$\int_\Gamma A_s[q_1]ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}A_s[q_1]ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon'}A_s[q_1]ds=\frac{1}{2}.$$

（4）最后设$(x_0, y_0)$在$x$轴上，即$y_0=0$，作一直线$y=\delta$（$\delta>0$充分小），考虑区城$D$位于$y=\delta$上面的部分$D_\delta$，在$D_\delta$上应用Green公式有

$$\int_{\Gamma'}A_s[q_1]ds+\int_{x_1}^{x_2}\left(q_{1y}-\frac{2\beta}{y}q\right)\Bigg|_{y=\delta}dx=0.$$

其中$x_1$，$x_2$是曲线$\Gamma$与直线$y=\delta$交点的横坐标，而$\Gamma'$是$\Gamma$位于直线$y=\delta$以上的部分。由于

$$q_1y-\frac{2\beta}{y}q_1=k_1y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left[r_1^{-2\beta}F\left(\beta,\beta,2\beta,\frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]$$

$$=-k_1\beta y^{2\beta}r_1^{-2(\beta+1)}2(y+y_0)F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$+2k_1\beta y^{2\beta}r_1^{-2\beta}F\left(\beta+1,\beta+1,2\beta+1,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$\times\left[\frac{y_0}{r_1^2}-\frac{2yy_0(y+y_0)}{r_1^4}\right]=-k_1\beta y^{2\beta}r_1^{-2(\beta+1)}$$

$$\times 2(y+y_0)F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)+2k_1\beta y^{2\beta}$$

$$\times r_1^{-2(\beta+2)}y_0F\left(\beta+1,\ \beta+1,\ 2\beta+1,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$\times[(x-x_0)^2+(y_0-y)^2].$$

因此，当$y_0=0$时，第二项消失，从而有

$$q_{1y}-\frac{2\beta}{y}q_1\bigg|_{y_0=0}=-2k_1\beta y^{2\beta+1}[(x-x_0)^2+y^2]^{-\beta-1}.$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(q_{1y}-\frac{2\beta}{y}q_1\right)\bigg|_{y=\delta}dx$$

$$=-2k_1\beta\int_{x_1}^{x_2}\delta^{2\beta+1}[(x-x_0)^2+\delta^2]^{-\beta-1}dx$$

如令$x=x_0+\delta t$，即$t=\dfrac{x-x_0}{\delta}$，则

$$\int_{x_1}^{x_2}\delta^{2\beta+1}[(x-x_0)^2+\delta^2]^{-\beta-1}dx$$

$$=\int_{\frac{x_1-x_0}{\delta}}^{\frac{x_2-x_0}{\delta}}(1+t^2)^{-\beta-1}dt.$$

因此，分三种情形。若$x_0$在$(a, b)$之外，则$x_2-x_0$与$x_1-x_0$同号，于是

$$\lim_{\delta\to0}\int_{\frac{x_1-x_0}{\delta}}^{\frac{x_2-x_0}{\delta}}(1+t^2)^{-\beta-1}dt=0.$$

若$x_0\in(a, b)$，则$x_2-x_0$与$x_1-x_0$异号，

$$-2k_1\beta\lim_{\delta\to0}\int_{\frac{x_1-\delta_0}{x}}^{\frac{x_2-x_0}{\delta}}(1+t^2)^{-\beta-1}dt$$

$$=-2k_1\beta\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{-\beta-1}dt$$

$$=-4k_1\beta\int_0^{\infty}(1+t^2)^{-\beta-1}dt$$

$$=-2k_1\beta\int_0^{\infty}(1+t_1)^{-\beta-1}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=-2k_1\beta\int_0^1(1-t^1)^{\beta-\frac{1}{2}}t'^{-\frac{1}{2}}dt'$$

$$=-2k_1\beta B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\beta\right)=-2k_1\beta\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma(1+\beta)}$$

$$=-2k_1\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}=-2k_1\pi\frac{2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}=-1.$$

上式运算中，已利用了如下二种变换：

$$t_1=t^2,\quad t'=\frac{t_1}{1+t_1}.$$

同时，利用了$B$-函数倍乘公式

$$2^{2\beta-1}\Gamma(\beta)\,\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\beta).$$

如$x_0=a$或$x_0=b$，则积分变为$\int_0^\infty$或$\int_{-\infty}^0$，故等于$-\frac{1}{2}$。至此，定理全部获证。

类似地，可以证明下面的定理2。

**定理2** 如$\Gamma$是上半平面$y>0$内一条连续可微的曲线，其端点是$x$轴上两点$a$，$b$。区域$D$是由$\Gamma$和$x$轴所围成的，则适当选择常数$k_2$，就有

$$\int_\Gamma A_s[q_2]ds=\int_\Gamma\left(q_2y-\frac{2\beta}{y}q_1\right)dx-q_{2x}dy$$

$$=\begin{cases} i(x,y)+1, & \text{当}(x_0,\ y_0)\in D,\\ i(x,y)+\frac{1}{2}, & \text{当}(x_0,y_0)\in\Gamma,\\ i(x,\ y), & \text{当}(x_0,\ y_0)\overline{\in}\overline{D}.\end{cases}\tag{3.23}$$

其中

$$i(x,y)=-\int_a^b A_s[q_2]\Big|_{y=0}ds$$

$$=-\int_a^b\left(q_2y-\frac{2\beta}{y}q_2\right)\Big|_{y=0}dx.$$

最后，我们来研究$\beta\neq\beta'$时，即（3.17）的基本解的性质。

首先注意到

$$
\begin{cases}
v_1(x,\ 0;x_0,\ y_0)=0,\ b>0,\ y_0\neq 0, \\
\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial y}-\dfrac{2b}{y}v_1\right)\Big|_{y=0}=0,\ b>0,\ y_0\neq 0, \\
v_2(x,\ 0;\ x_0,\ y_0)=0,\ b<\dfrac{1}{2}, \\
\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial y}-\dfrac{2b}{y}v_2\right)=0\ (1),\ b<\dfrac{1}{2}.
\end{cases}
\tag{3.24}
$$

类似于定理 1，我们有

**定理 3**　设$\Gamma$是上半平面$y>0$内一条连续可微曲线，它与$x$轴的交点为$A(a,\ 0)$，$B(b,\ 0)$，$a<b$，则当

$$
k_1=\frac{2^{2b-2}\Gamma(b+ai)\Gamma(b-ai)}{\pi\Gamma(2b)}
$$

时，对于点$M_0(x_0,\ y_0)$有

$$
\int_\Gamma A_s[v_1]ds=\begin{cases}1,\ \text{当}M_0\in D, \\ \dfrac{1}{2},\ \text{当}M_0\in\Gamma,\ y_0\neq 0, \\ 0.\ \text{当}M_0\bar{\in}\overline{D}.\end{cases}
\tag{3.25}
$$

其中，$D$，$\Gamma$内容同定理 2，而

$$
\int_\Gamma A_s[v_1]ds=\int_\Gamma\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2b}{y}v\right)dx-\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{2a}{y}v\right)dy.
$$

定理 3 证明的主要步骤和技巧与定理 1 的证明过程完全类似，所略有不同的是4°．即$M_0$落在$x$轴上的情形．此时，$y_0=0$，我们先作$y=\delta$（$\delta>0$充分小），然后考虑$D_\delta$: $\Gamma$与直线$y=\delta$所围的区域．对$D_\delta$应用Green公式，得到

$$\int_{\Gamma'} A_s[v_1]ds+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{2b}{y}v_1\right)\Bigg|_{y=\delta,\ y_0=0}dx=0.$$

其中$x_1$，$x_2$同定理 1 证明中的4°．显然有$\delta\to 0$时，$\int_{\Gamma'}\to\int_{\Gamma}$．但是不难算出

$$v_{1y}-\frac{2\beta}{y}v_1\Big|_{y_0=0}=\frac{-2k_1y^{2b}[by+a(x-x_0)]}{[y^2+(x-x_0)^2]^{b+1}}e^{2a\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-x_0}{y}},$$

于是

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(v_1y-\frac{2b}{y}v_1\right)\Bigg|_{y=\delta,\ y_0=0}dx$$

$$=2k_1\int_{\frac{x_1-x_0}{\delta}}^{\frac{x_2-x_0}{\delta}}(b+at)(1+t^2)^{-b-1}e^{2a\mathrm{tg}^{-1}t}dt. \tag{3.26}$$

注意到

$$\frac{b+at}{(1+t^2)^{b+1}}e^{2a\mathrm{tg}^{-1}t}=\frac{b+at}{1+t^2}(1+ti)^{-(b+ai)}(1-ti)^{-(b-ai)}$$

$$=\frac{b-ai}{2}(1+ti)^{-(b+ai)}(1-ti)^{-(b-ai)-1}$$

$$+\frac{b+ai}{2}(1+ti)^{-(b+ai)-1}(1-ti)^{-(b-ai)}. \tag{3.27}$$

由于$-\frac{\pi}{2}\leqslant\mathrm{tg}^{-1}t\leqslant\frac{\pi}{2}$，故$i$应在以$(-\infty,\ 0)$剪开的复平面上取值，即$i=e^{\frac{\pi}{2}i}$．如果$M_0\in(a,\ b)$，则可选取$\delta$充分小，使$x_0\in(x_1,\ x_2)$，从而当$\delta\to 0$时，(3.26) 积分限趋于$-\infty$和$+\infty$．于是，把 (3.27) 代入 (3.26)，经过不很困难的计算

可得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{2b}{y}v_1\right)\bigg|_{y_0=0, y=\delta}dx$$

$$=-k_1\int_0^\infty\Big\{(b-ai)\Big[(yi)^{-(b+ai)}\cdot(2-yi)^{-(b-ai)-1}$$

$$+(-yi)^{-(b+ai)}(2+yi)^{-(b-ai)-1}\Big]+(b+ai)\cdot\Big[(yi)^{-(b-ai)}$$

$$\times(2-yi)^{-(b+ai)-1}+(-yi)^{-(b-ai)}(2+yi)^{-(b+ai)-1}\Big]\Big\}dy. \tag{3.28}$$

利用$B$-函数的积分公式

$$\int_0^\infty(1+bt)^{-y}t^x dt=b^{-(x+1)}B(x+1,\ y-x-1),$$

我们有

$$\int_0^\infty(yi)^{-(b+ai)}(2-yi)^{-(b-ai)-1}dy$$

$$=2^{-2b}\frac{\Gamma(1-b-ai)\Gamma(2b)}{\Gamma(1+b-ai)}e^{-b\pi i+\frac{\pi}{2}i+\pi a}$$

同理

$$\int_0^\infty(-yi)^{-(b+ai)}(2+yi)^{-(b-ai)-1}dy$$

$$=2^{-2b}\frac{\Gamma(1-b-ai)\Gamma(2b)}{\Gamma(1+b-ai)}e^{\pi bi-\frac{\pi}{2}i-\pi a}.$$

因为

$$e^{\pi a+\frac{\pi}{2}i-\pi bi}+e^{-\pi a-\frac{\pi}{2}i+\pi bi}$$

$$=2\cos\pi\left(b+ai-\frac{1}{2}\right)=2\sin\pi(b+ai).$$

对 (3.28) 后两式作类似计算，最后得到 (3.28)右端等于$-1$。从而

$$\int_\Gamma A_s[v_1]ds = 1, \quad M_0 \in (a, b).$$

如果$M_0 \overline{\in} [a, b]$，则当$\delta \to 0$时，(3.26) 积分限同时趋于$-\infty$或$+\infty$，而因为积分收敛，故有

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{s1}^{s2} A_s[v_1]ds = 0.$$

从而有

$$\int_\Gamma A_s[v_1]ds = 0$$

而如$M_0 = A$或$M_0 = b$，则类似可得

$$\int_\Gamma A_s[v_1]\, ds = \frac{1}{2}.$$

定理证完。

**定理 4**　在定理 3 的假设下，当

$$k_2 = \frac{2^{-2b}\Gamma(1-b-ai)\Gamma(1-b+ai)}{\pi\Gamma(2-2b)}$$

时，对$M_0(x_0, y_0)$有

$$\int_\Gamma A_s[v_2]\, ds = \begin{cases} 1 + i\,(x_0, y_0), & M_0 \in D, \\ \dfrac{1}{2} + i\,(x_0, y_0), & M_0 \in \Gamma,\ y \neq 0, \\ i\,(x_0, y_0), & M_0 \overline{\in} \overline{D},\ y_0 \neq \theta, \\ 0, & y_0 = 0,\ b < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

其中

$$i\,(x_0, y_0) = -\int_a^b \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{2b}{y} v_2 \right)\Bigg|_{y=0} dx$$

## §4. 奇性定解问题，Green函数

对于方程（3.3），仿照Laplace方程关于圆的定解问题，我们首先讨论在半圆σ：$x^2+y^2\leqslant 1$，$y\geqslant 0$上的两个奇性定解问题：

$$
(a)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{2\beta}{y}u_y=0, & \beta<\dfrac{1}{2}, \\ u|_\sigma=\varphi, \\ u|_{y=0}=t(x); \end{cases}
$$

$$
(b)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{2\beta}{y}u_y=0, & \beta>0, \\ u|_\sigma=\varphi, \\ \lim\limits_{y\to 0}y^{2\beta}u_y=\nu(x). \end{cases}
$$

由Green公式

$$
\iint_D\left\{v\left(u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y\right)-u\left(v_{xx}+v_{yy}-\frac{2\beta}{y}v_y+\frac{2\beta}{y^2}v\right)\right\}dxdy
$$

$$
=\int_{\partial D}u\left[\left(v_y-\frac{2\beta}{y}v\right)dx-v_xdy\right]-v(u_ydx-u_xdy). \tag{3.26}
$$

由（3.26）可以看出，问题（$a$）和（$b$）的Green函数G和$\overline{G}$应分别满足下列条件：

1°、当$(x,y)\neq(x_0,y_0)$时，关于$(x_0,y_0)$满足原方程，关于$(x,y)$满足共轭方程。

2°、当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，具有对数奇性。

3°、$G$满足边界条件：$G|_\sigma=0$，$G|_{y=0}=0$。

$\overline{G}$满足边界条件：$\overline{G}\Big|_\sigma=0$，$\lim\limits_{y\to}\left(\frac{\partial\overline{G}}{\partial y}-\frac{2\beta}{y}\overline{G}\right)=0$。

4°、$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\left(G_y-\frac{2\beta}{y}G\right)dx-Gxdy=1$，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\left(\overline{G}_y-\frac{2\beta}{y}\overline{G}\right)dx-\overline{G}_x dy=1$$

其中$G_\varepsilon$表示以（$x_0$，$y_0$）为中心，$\varepsilon$为半径的圆周。

利用上节求出的基本解$q_1$，$q_2$，不难求出$G$，$\overline{G}$。主要是利用方程（3.3）存在变换群。我们知道，Laplace 方程关于圆的 Green 函数是利用反演变换得来的，而方程(3.3)同样也可进行反演变换。下面我们具体求出$G$，$\overline{G}$。

已知基本解$q_1$，$q_2$均分别满足条件1°，2°，4°。此外，

$$\begin{cases}\lim\limits_{y\to0}\left(q_1y-\dfrac{2\beta}{y}q_1\right)=0, & \text{当}\ \beta>0,\\ q_2|_{y=0}=0.\end{cases}$$

因此，从$q_1$，$q_2$出发作$G$，$\overline{G}$，只需考虑在$\sigma$上为零的条件，遵循古典的方法，作反演点

$$\overline{x_0}=\frac{x_0}{r_0^2},\quad \overline{y_0}=\frac{y_0}{r_0^2},\quad r_0^2=x_0^2+y_0^2,$$

则

$$\begin{aligned}&G(x,y;x_0,y_0)\\&=q_2(x,y;x_0,y_0)-r_0^{-2\beta}q_2(x,y;\overline{x_0},\overline{y_0})\\&=k_2yy_0^{1-2\beta}r_1^{2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\end{aligned}$$

$$-k_2 y y_0^{1-2\beta} r_0^{2\beta-2} \bar{r}_1^{2\beta-2} F\left(1-\beta,\ 1-\beta, 2-2\beta, \frac{4y\bar{y}_0}{\bar{r}_1^2}\right). \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} G(x, y; x_0, y_0) &= q_1(x, y; x_0, y_0) - r_0^{-2\beta} q_1(x, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0) \\ &= k_1 y^{2\beta} r_1^{-2\beta} F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right) - k_1 y^{2\beta} r_0^{-2\beta} \bar{r}_1^{-2\beta} \\ &\quad \times F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4y\bar{y}_0}{\bar{r}_1^2}\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中

$$k_2 = \frac{2^{-2\beta} r_r^2 (1-\beta)}{\pi \Gamma(2-2\beta)},\quad \bar{r}_1^2 = (x-\bar{x}_0)^2 + (y+\bar{y}_0)^2.$$

有了Green 函数后，就可以求出问题（$a$），（$b$）的解的表达式。在半圆$x^2+y^2\leqslant 1$，$y\geqslant 0$中挖去小圆$C_\varepsilon$，应用 Green 公式得

$$0 = \int_{\sigma+[-1,1]-C_\varepsilon} u\left[\left(v_y - \frac{2\beta}{y} v\right)dx - v_x dy\right] - v\,(u_y dx - u_x dy).$$

在上式中取 $u$ 是问题（$a$）或（$b$）的解，而 $v$ 为Green 函数$G$ 或$\overline{G}$，并让 $\varepsilon\to 0$，则得

$$0 = \int_\sigma \varphi\,(G_y dx - G_x dy) + \int_{-1}^{1} \tau\,(x) \times \left(G_y - \frac{2\beta}{y} G\right)_{y=0} dx - u\,(x_0,\ y_0),$$

或

$$u\,(x_0,\ y_0) = \int_{-1}^{1} \tau\,(x)\left(G_y - \frac{2\beta}{y} G\right)_{y=0} dx$$

$$+\int_{\sigma}\varphi\,(G_y dx - G_x dy). \tag{3.29}$$

$$0=\int_{\sigma}\varphi\,(\overline{G}_y dx-\overline{G}_x dy)-\int_{-1}^{1}v(x)[y^{-2\beta}\overline{G}]_{y=0}dx$$

$$-\,u\,(x_0,\ y_0)$$

或

$$u\,(x_0,\ y_0)=-\int_{-1}^{1}v(x)[y^{-2\beta}\overline{G}]_{y=0}dx$$

$$+\int_{\sigma}\varphi\,(\overline{G}_y dx-\overline{G}_x dy). \tag{3.30}$$

下面将（3.29），（3.30）右端具体算出来．由于

$$q_{2y}=k_2 y_0^{\,1-2\beta}r_1^{\,2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$+k_2 y y_0^{\,1-2\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left[r_1^{\,2\beta-2}F\left(1-\beta,1-\beta,\ 2-2\beta,\frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]$$

所以

$$\left(q_{2}y-\frac{2\beta}{y}q_2\right)_{y=0}=k_2(1-2\beta)\,y^{1-2\beta}[(x-x_0)^2+y_0^2]^{\beta-1}.$$

而反演部分则为

$$k_2(1-2\beta)\,y_0^{\,1-2\beta}(x_0^2+y_0^2)^{\beta-1}[(x-\overline{x}_0)^2+\overline{y}_0^2]^{\beta-1}.$$

于是

$$\int_{-1}^{1}\tau\,(x)\left(G_y-\frac{2\beta}{y}G\right)_{y=0}dx$$

$$=k_2(1-2\beta)\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\tau\,(x)\,dx}{[(x-x_0)^2+y_0^2]^{1-\beta}}-\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^{1-\beta}}\right.$$

$$\left.\times\int_{-1}^{1}\frac{\tau\,(x)\,dx}{[(x-\overline{x}_0)^2+\overline{y}_0^2]^{1-\beta}}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[r_1^{2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]$$

$$=(2\beta-2)r_1^{2\beta-4}(y+y_0)F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$+\frac{1-\beta}{2}r_1^{2\beta-2}F\left(2-\beta,\ 2-\beta,\ 3-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$\times\frac{4y_0}{r_1^2}\left[1-\frac{2y(y+y_0)}{r_1^2}\right].$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(r_0\overline{r}_1)^{2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4y\overline{y}_0}{\overline{r}_1^2}\right)\right]$$

$$=(2\beta-2)(r_0\overline{r}_1)^{2\beta-4}(r_0^2y+y_0)$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4y\overline{y}_0}{\overline{r}_1^2}\right)+\frac{1-\beta}{2}(r_0\overline{r}_1)^{2\beta-2}$$

$$\times F\left(2-\beta,2-\beta,3-2\beta,\frac{4y\overline{y}_0}{\overline{r}_1^2}\right)\cdot\frac{4\overline{y}_0}{\overline{r}_1^2}\left[1-\frac{2y(y+\overline{y}_0)}{\overline{r}_1^2}\right]$$

因为在上半圆周上有$r_1=r_0\overline{r}_1$，其中$\overline{r}_1^2=(x-\overline{x}_0)^2+(y+\overline{y}_0)^2$，所以

$$\frac{\overline{y}_0}{\overline{r}_1^2}=\frac{y_0}{r_0^2\overline{r}_1^2}=\frac{y_0}{r_1^2},$$

故有

$$G_y|_\sigma=k_2yy_0^{1-2\beta}(2\beta-2)(1-r_0^2)r_1^{2\beta-4}y$$

$$\times F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)+k_2yy_0^{1-2\beta}(2\beta-2)$$

$$(1-r_0^2)r_1^{2\beta-4}y\frac{2yy_0}{r_1^2}F\left(2-\beta,2-\beta,3-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right).$$

利用超几何函数的关系式

$$CF(a,\ b,\ c,\ z)-CF(a+1,\ b,\ c,\ z)+bzF(a+1,\ b+1,\ c+1,\ z)=0,$$

最后得到

$$G_y|_\sigma=-k_2y^2y_0^{1-2\beta}(1-r_0^2)r_1^{2\beta-4}\left[(2-2\beta)F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right.$$

$$\left.+(1-\beta)\frac{4yy_0}{r_1^2}F\left(2-\beta,2-\beta,3-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]$$

$$=-k_2y^2y_0^{1-2\beta}(1-r_0^2)r_1^{2\beta-4}(2-2\beta)$$

$$\times F\left(2-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right).$$

类似地有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[r_1^{2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\right]$$

$$=(2\beta-2)r_1^{2\beta-4}(x-x_0)F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)$$

$$-\frac{1-\beta}{2}r_1^{2\beta-2}F\left(2-\beta,2-\beta,3-2\beta,\frac{4yy_0}{r_1^2}\right)\cdot\frac{8yy_0(x-x_0)}{r_1^4}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left[(r_0\overline{r}_1)^{2\beta-2}F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4y\overline{y}_0}{r_1^2}\right)\right]$$

$$=(2\beta-2)(r_0\overline{r}_1)^{2\beta-4}(r_0^2x-x_0)$$

$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4y\bar{y}_0}{\bar{r}_1^2}\right)-\frac{1-\beta}{2}\bar{r}_1^{2\beta-2}$$

$$\times F\left(2-\beta,\ 2-\beta,\ 3-2\beta,\ \frac{4y\bar{y}_0}{\bar{r}_1^2}\right)\ \frac{8y\bar{y}_0(x-\bar{x}_0)}{\bar{r}_1^4}.$$

和

$$G_x|_\sigma=k_2 y_0^{1-2\beta}(1-r_0^2)r_1^{2\beta-4}(2\beta-2)xy$$

$$\times F\left(2-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right).$$

因此

$$\int_\sigma \varphi\,(G_y dx-G_x dy)=-\int_0^\pi \varphi(\theta)(G_y\sin\theta+G_x\cos\theta)\,d\theta$$

$$=k_2(2-2\beta)\ y_0^{1-2\beta}(1-r_0^2)\int_0^\pi \varphi(\theta)$$

$$\times\frac{F\left(2-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\frac{4yy_0}{r_1^2}\right)}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^{2-\beta}}\sin\theta d\theta.$$

这样就得到问题（$a$）的解的表达式为

$$u(x_0,\ y_0)=k_2(1-2\beta)y_0^{1-2\beta}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\tau(x)dx}{[(x-x_0)^2+y_0^2]^{1-\beta}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^{1-\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(x)dx}{[(x-\bar{x}_0)^2+\bar{y}_0^2]^{1-\beta}}\right\}$$

$$+k_2(2-2\beta)y_0^{1-2\beta}(1-r_0^2)\int_0^\pi\varphi(\theta)$$

$$\times\frac{F\left(2-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ \frac{4yy_0}{r_1^2}\right)}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^{2-\beta}}\sin\theta d\theta.\tag{3.31}$$

对于问题（$b$）类似地可得到

$$u(x_0,\ y_0)=-k_1\int_{-1}^{1}\frac{v(x)dx}{[(x-x_0)^2+y_0^2]^\beta}+\frac{k_1}{(x_0^2+y_0^2)^\beta}$$

$$\times\int_{-1}^{1}\frac{v(x)dx}{[(x-\bar{x}_0)^2+\bar{y}_0^2]^\beta}+2k_1\beta(1-r_0^2)$$

$$\times\int_0^\pi\varphi(\theta)\frac{F\left(1+\beta,\beta,2\beta,\dfrac{4yy_0}{r_1^2}\right)}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^{\beta+1}}\sin^{2\beta}\theta d\theta.$$

(3.32)

根据Green 函数的性质，（3.31），（3.32）满足方程是显然的。下面我们验证它满足边界条件。首先，对（3.31），考虑当$y_0\to0$时的情形，在（3.31）中，对右端第一项，令$x=x_0+y_0t$，得到

$$k_2(1-2\beta)y_0^{1-2\beta}\int_{\frac{-1-x_0}{y_0}}^{\frac{1-x_0}{y_0}}\frac{\tau(x_0+y_0t)y_0dt}{y_0^{2-2\beta}(1+t^2)^{1-\beta}}$$

$$=k_2(1-2\beta)\int_{\frac{-1-x_0}{y_0}}^{\frac{1-x_0}{y_0}}\frac{\tau(x_0+y_0t)}{(1+t^2)^{-\beta}}dt$$

令$y_0\to0$得

$$k_2(1-2\beta)\tau(x_0)\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{\beta-1}dt$$

$$=k_2(1-2\beta)\tau(x_0)\int_0^\infty(1+t)^{\beta-1}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=k_2(1-2\beta)\tau(x_0)\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}-\beta}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=k_2(1-2\beta)B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\beta\right)\tau(x_0)$$

$$=k_2(1-2\beta)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}{\Gamma(1-\beta)}\tau(x_0)$$

$$=k_2(1-2\beta)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-2\beta)\sqrt{\pi}\,2^{2\beta}}{\Gamma^2(1-\beta)}\tau(x_0)$$

$$=k_2\frac{\pi\Gamma(2-2\beta)2^{2\beta}}{\Gamma^2(1-\beta)}\tau(x_0)=\tau(x_0),$$

对 (3.10) 右端第二项，令 $x=\overline{x}_0+\overline{y}_0t$，则得

$$k_2(1-2\beta)\frac{y_0^{1-2\beta}}{(x_0^2+y_0^2)^{1-\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(x)dx}{[(x-\overline{x}_0)^2+\overline{y}_0^2]^{-\beta}}$$

$$=k_2(1-2\beta)y_0^{1-2\beta}(x_0^2+y_0^2)^{\beta-1}$$

$$\times\int_{\frac{-1-\overline{x}_0}{\overline{y}_0}}^{\frac{1-\overline{x}_0}{\overline{y}_0}}\frac{\tau(\overline{x}_0+\overline{y}_0t)\overline{y}_0}{\overline{y}_0^{2-2\beta}(1+t^2)^{1-\beta}}dt.$$

因为当 $y_0\to0$ 时，$\overline{x_0}\to\frac{1}{x_0}$，而 $|x_0|<1$，所以上式积分的上下限同时趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$。从而

$$\lim_{y_0\to0}k_2(1-2\beta)\frac{y_0^{1-2\beta}}{(x_0^2+y_0^2)^{1-\beta}}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(x)dx}{[(x-\overline{x_0})^2+\overline{y_0}^2]^{1-\beta}}=0.$$

(3.31) 式右端第三项，由于假定 $1-2\beta>0$，所以当 $y_0\to0$ 时它趋于零. 这样就验证了条件

$$u|_{y=0}=\tau(x).$$

对于问题（$b$），将（3.32）的第一项对$y_0$微商得

$$2\beta k_1 y_0\int_{-1}^{1}\frac{v\,(x)\,dx}{[(x-x_0)^2+y_0^2]^{\beta+1}}$$

$$=2\beta k_1 y_0^{-2\beta}\int_{\frac{-1-x_0}{y_0}}^{\frac{1-x_0}{y_0}}\frac{v\,(x_0+y_0t)}{(1+t^2)^{\beta+1}}dt.$$

$$\lim_{y_0\to 0} y_0^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y_0}\left\{-k_1\int_{-1}^{1}\frac{v\,(x)\,dx}{[(x-x_0)^2+y_0^2]^{\beta}}\right\}$$

$$=2\beta k_1 v(x_0)\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{-\beta-1}d^t$$

$$=2\beta k_1 v(x_0)\int_{0}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\beta-1}dt$$

$$=2\beta k\,v(x_0)\,B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\beta\right)$$

$$=2\beta k_1 v(x_0)\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma(1+\beta)}$$

$$=2\beta k_1 v(x_0)\ \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+2\beta\right)2^{-2\beta}}{\Gamma^2(1+\beta)}$$

$$=k_1 v(x)\,\pi\,\frac{\Gamma(2\beta)\,2^{2-2\beta}}{\Gamma^2(\beta)}=v\,(x_0)\,.$$

不难验证，第二、三项对$y_0$微商，然后乘以 $y_0^{2\beta}$，当$y_0\to 0$时，趋于零。

再验证表达式（3.31），当$(x_0,\ y_0)\to\sigma$时，趋于边界值$\varphi(\theta)$。显然，（3.31）的前两项和，当$(x_0,\ y_0)\to\sigma$时，趋于零。其次，由定理1

$$k_2(2-2\beta)y_0^{1-2\beta}(1-r_0^2)\int_0^{\pi}\frac{F\left(2-\beta,1-\beta,2-2\beta,\dfrac{4yy_0}{r_1^2}\right)}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^{2-\beta}}$$

$$\times\sin\theta d\theta\equiv 1$$

考虑σ上一固定点$\theta_0$，给定$\varepsilon>0$后，可选取$\sigma>0$，使得$|\theta-\theta_0|<\delta$时

$$|\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

此外，当$r_0\to 1$而$|\theta-\theta_0|\geqslant\delta$时，（3.33）式中积分号下的函数有界，但$1-r_0^2\to 0$，因此，如记

$$k_2(2-2\beta)y_0^{1-2\beta}(1-r_0^2)\frac{F\left(2-\beta,1-\beta,2-2\beta,\ \dfrac{4yy_0}{r_1^2}\right)}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^{2-\beta}}$$

$$\times\sin\theta=k(x_0,\ y_0,\ \theta).$$

则有

$$\left(\int_0^{\theta-\delta}+\int_{\theta_0+\delta}^{\pi}\right)k(x_0,\ y_0,\ \theta)d\theta<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

其中$M=\max 2|\varphi|$. 于是

$$|u(x_0,\ y_0)-\varphi(\theta_0)|\leqslant\left(\int_0^{\theta_0-\delta}+\int_{\theta_0+\delta}^{\pi}\right)|\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)|$$

$$\times k(x_0,\ y_0,\ \theta)d\theta+\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}|\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)|$$

$$\times k(x_0,\ y_0,\ \theta)d\theta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

（3.31）满足边界条件得证。

对（3.32）可类似地进行讨论。

利用基本解$q_1$、$q_2$还不难解决半平面的奇性Dirihlet 问题和奇性Neumann问题。事实上，基本解 $q_2$ 就是半平面上的奇性问题。

$$(D)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{2\beta}{y}u_y=0, & \beta<\dfrac{1}{2}, \\ u|_{y=0}=\tau(x), & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

的Green函数。因为已知$q_2|_{y=0}=0$，类似前面的计算不难得出问题($D$)的解的表达式为

$$u(x_0,\ y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau(x)\left(q_{2y}-\frac{2\beta}{y}q_2\right)_{y=0}dx$$

$$=k_2(1-2\beta)y_0^{1-2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(x)dx}{[(x-x_0)^2+y_0^2]^{1-\beta}}. \tag{3.34}$$

当$\tau$连续有界时，积分（3.34）绝对一致收敛。我们证明函数$u(x,\ y)$有界，且当$y_0\to 0$时，

$u(x_0,\ y_0)\to\tau(x_0)$。令

$$x=x_0+y_0t,$$

则（3.34）变为

$$u(x_0,\ y_0)=k_2(1-2\beta)\int_{-\infty}^{\infty}\tau(x_0+y_0t)(1+t^2)^{\beta-1}dt. \tag{3.35}$$

因为

$$k_2(1-2\beta)\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{\beta-1}dt=1,$$

由（3.35）得到

$$|u(x_0,\ y_0)|\leqslant \max|\tau(x_0)|=M.$$

即 $u(x,\ y)$ 在上半平面 $y>0$ 上有界。

其次，由（3.35）

$$u(x_0,\ y_0)-\tau(x_0)$$

$$=k_2(1-2\beta)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tau(x_0+y_0t)-\tau(x_0)\right](1-t^2)^{\beta-1}dt.$$

由于 $\tau$ 对任意的 $x_0$，$y_0$，$t$ 是有界函数

$$|\tau(x_0+y_0t)-\tau(x_0)|\leqslant 2M.$$

因此对任意 $\varepsilon>0$，存在充分大的正数 $N$，使得

$$k_2(1-2\beta)2M\int_{-\infty}^{-N}(1+t^2)^{\beta-1}dt<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$k_2(1-2\beta)2M\int_{N}^{\infty}(1+t^2)^{\beta-1}dt<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再由 $\tau$ 的连续性，当 $|t|\leqslant N$ 时，只要 $y_0$ 相当靠近零，就应有

$$|\tau(x_0+y_0t)-\tau(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

这样

$$\left|u(x_0,\ y_0)-\tau(x_0)\right|\leqslant k_2(1-2\beta)\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tau(x_0+y_0t)\right.$$

$$\left.-\tau(x_0)\right|(1+t^2)^{\beta-1}dt\leqslant k_2(1-2\beta)\left(\int_{-\infty}^{-N}+\int_{-N}^{N}\right.$$

$$\left.+\int_{N}^{\infty}\right)\left|\tau(x_0+y_0t)-\tau(x_0)\right|(1+t^2)^{\beta-1}dt$$

$$\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 的任意性，推出

$$\lim_{y_0\to 0} u(x_0, y_0) = \tau(x_0).$$

类似地，基本解$q_1$是半面上的奇性问题。

$$(N)\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{2\beta}{y} u_y = 0, \quad \beta > 0, \\ \lim\limits_{y\to 0} y^{2\beta} u_y = v(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

的Neumann函数。事实上，这由$\lim\limits_{y\to 0}\left(q_{1y} - \dfrac{2\beta}{y} q_1\right) = 0$即知。类似前面的计算，可得问题（$N$）的表达式为

$$u(x_0, y_0) = -k_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)\,dx}{[(x-x_0)^2 + y_0^2]^{\beta}}$$

$$= -k_1 y_0^{1-2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} v(x_0 + y_0 t)(1+t^2)^{-\beta} dt. \tag{3.37}$$

注　对 $\beta \neq \beta'$ 的椭圆EPD方程，我们可利用基本解$v_1$和$v_2$提类似的半平面上的奇性Dirichlet问题和Neumann问题。

## §5. 广义轴对称位势论（β—调和）

我们已经知道，方程（3.3)在$2\beta$为正整数时，可以由$2\beta+2$维的位势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{2\beta+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

关于后$2\beta+1$个变数（$x_1$，$x_2$，…，$x_{2\beta+1}$）是轴对称时导出来。这就是说，如果$2\beta+2$维的调和函数$u(x, x_1, \cdots, x_{2\beta+1})$

对后$2\beta+1$个变数的关系是只与它们的平方和有关的关系，即

$$u(x, x_1, \cdots, x_{2\beta+1}) = u(x, \sqrt{x_1^2+\cdots+x_{2\beta+1}^2}) = u(x, y)$$

其中，$y=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{2\beta+1}^2}$，那么$u$就满足方程（3.3）．因此，当$\beta$为任意实数时，（1）便是位势方程的推广．有人把这个方程的理论称为广义轴对称位势论（GASPT），它的解称为$\beta$-调和函数．从这种观点出发研究方程（3.3）是国外A．Weinstein学派的工作．

**1.基本解和圆环位势**

Tricomi在研究$\beta=\frac{1}{3}$的方程（1）时曾发现，当奇点是$x$轴上一点（$x_0$，0）时，(3.3）的基本解是

$$[(x-x_0)^2+y^2]^{-\frac{1}{3}}.$$

自然，我们可将它视作$n$维调和方程的基本解

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2\right]^{-\frac{n}{2}+1}$$

的推广．但是，若奇点（$x_0$，$y_0$）不在$x$轴上时，情况则没有这么简单，Tricomi没有求出这个基本解．

为了直观起见，我们就以三维情形为例说明问题．位势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0. \tag{3.38}$$

以$x$轴为对称轴的轴对称解$u(x, \sqrt{x_1^2+x_2^2})$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad y=\sqrt{x_1^2+x_2^2}. \tag{3.39}$$

方程（3.39）的解代表了（3.38）在三维空间中关于$x$轴的子午

面（即过 $x$ 轴的截面）上的解。按对称意义，以这个子午面绕 $x$ 轴旋转而形成的旋转体上 $u$ 的值与子午面上 $u$ 的值相同。对于方程（3.39）来讲，对称轴上的点和原来调和函数空间的点是一一对应的。但不在对称轴上的点，情况就不同了。方程（3.39）的一点（$x_0$，$y_0$）对应于调和函数空间中的一个圆环——圆心在 $x$ 轴上的 $x_0$ 点，半径为 $y_0=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$。从而基本解不再是点源位势，而是圆环位势了。因此，方程（3.39）的基本解应是位势方程的基本解的积分。

将（3.38）的点源位势写为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}&=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(x_1-x_{10})^2+(x-x_{20})^2}}\\
&=[(x-x_0)^2+x_1^2+x_2^2+x_{10}^2+x_{20}^2-2x_1x_{10}-2x_2x_{20}]^{-\frac{1}{2}}\\
&=[(x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2yy_0(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0)]^{-\frac{1}{2}}\\
&=[(x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\alpha]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

其中，$\cos\theta=\frac{x_1}{y}$，$\sin\theta=\frac{x_2}{y}$，$\cos\theta_0=\frac{x_{10}}{y_0}$，$\sin\theta_0=\frac{x_{20}}{y_0}$，$\alpha$ 是向径 $y$ 与 $y_0$ 之间的夹角。对整个圆环 $y=y_0$ 产生的势应为（3.40）对 $\theta_0$ 从 0 到 $2\pi$ 积分。由于对称性，只须取 0 和 $\pi$ 的积分即可。因此，得基本解为

$$\int_0^{\pi}[(x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\alpha]^{-\frac{1}{2}}d\theta_0.$$

因为子午面可任取一个，所以可以选取 $\theta=0$，即 $\theta_0=\alpha$，这样就得到方程（3.39）的基本解为

$$\int_0^{\pi}[(x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\alpha]^{-\frac{1}{2}}d\alpha.$$

把这个结果推广到高维空间，因$n+m+1$维位势方程的基本解为

$$\left[\sum_{i=1}^{n+m+1}(x_i-x_{i0})^2\right]^{-\frac{n+m-1}{2}},$$

相应的有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{-\frac{n+m-1}{2}}.$$

上式乘上$m+1$维球面上的面积元素的Jacobi因子$\sin^{m-1}\gamma$，再对$\gamma$积分，则得方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{m}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{3.41}$$

的基本解为

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^{m-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\frac{n+m-1}{2}}}.$$

再用任意的实数$2\beta$代替整数$m$，则得方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{3.42}$$

的基本解为

$$v(x,y;x_0,y_0)=\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}. \tag{3.43}$$

不难验证（3.43）的确满足（3.42）．由于

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = -2\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{(x_i-x_{i0})\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = -2\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}$$

$$+4\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{(x_i-x_{i0})^2\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+3}{2}}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{(y-y_0\cos r)\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2\beta-1}r\,dr}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}$$

$$+4\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{(y-y_0\cos r)^2\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+3}{2}}}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=(2\beta+n-1)(2\beta+n+1)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+(y-y_0\cos r)^2\right]\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos r\right]^{\beta+\frac{n+3}{2}}}$$

$$-(n+1)(2\beta+n-1)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}$$

$$-\frac{2\beta(2\beta+n-1)}{y}$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{(y-y_0\cos r)\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}$$

$$=-(2\beta+n-1)(2\beta+n+1)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{y_0^2\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+3}{2}}}$$

$$+\frac{2\beta+n-1}{y}$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{2\beta y_0 \cos r \sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{(2\beta+n-1)y_0}{y}$$

$$\times\int_0^{\pi}\left\{\frac{-(2\beta+n+1)yy_0\sin\gamma\cdot\sin^{2\beta}\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+3}{2}}}\right.$$

$$\left.+\frac{2\beta\cos r\sin^{2\beta-1}\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}\right\}d\gamma$$

$$=\frac{(2\beta+n-1)y_0}{y}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d}{dr}\left\{\frac{\sin^{2\beta}\gamma}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n+1}{2}}}\right\}d\gamma$$

$$=0,$$

下面将（3.43）化为超几何函数。令

$$\tau=\cos^2\frac{\gamma}{2},\quad z=\frac{4yy_0}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+(y+y_0)^2}.$$

则

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\left(1-\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=(1-\tau)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2(1-\tau)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}},$$

$$d\tau = -\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}d\gamma = -(1-\tau)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}d\gamma.$$

再注意到

$$y+y_0{}^2-2yy_0\cos r = (y+y_0)^2-2yy_0(1+\cos\gamma)$$

$$= (y+y_0)^2-4yy_0\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= (y+y_0)^2-4yy_0\tau.$$

则得

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i0})^2+y^2+y_0{}^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{2^{2\beta-1}}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i0})^2+(y+yo)^2\right]^{\beta+\frac{n-1}{2}}}$$

$$\times\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta-1}d\tau}{\left(1-\dfrac{4yy_0\tau}{\sum_{i=1}(x_i-x_{i0})^2+(y+y_0)^2}\right)^{\beta+\frac{n-1}{2}}}$$

$$= 2^{-n}\left(\frac{z}{yy_0}\right)^{\beta+\frac{n-1}{2}}\int_0^1(1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\beta-1}(1-z\tau)^{-\beta-\frac{n-1}{2}}d\tau$$

$$= 2^{-n}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}\left(\frac{z}{yy_0}\right)^{\beta+\frac{n-1}{2}}F\left(\beta+\frac{n-1}{2},\beta,2\beta,z\right). \tag{3.44}$$

又由超几何函数性质有

$$F\left(\beta+\frac{n-1}{2},\ \beta,\ 2\beta,\ z\right)$$

$$=\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\beta-\frac{n-1}{2}\right)}F\left(\beta+\frac{n-1}{2},\beta,\frac{n+1}{2},1-z\right)$$

$$+\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\beta+\frac{n-1}{2}\right)}(1-z)^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\times F\left(\beta-\frac{n-1}{2},\ \beta,\ \frac{3-n}{2},\ 1-z\right).$$

而

$$(1-z)^{-\frac{n-1}{2}}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+(y-y_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2+(y+y_0)^2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}.$$

因此，(3.44) 的确具有$\left[\sum_{i=1}^{n}(x-x_{i0})^2+(y-y_0)^2\right]$的

$\frac{n-1}{2}$阶奇性，故是方程 (3.42) 的基本解。

由 (3.44) 还可导出与 (3.42) 相应的空间双曲型EPD方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{3.45}$$

的基本解. 实际上，在 (3.42) 中，如以$y$代$iy$ (代$y_0$以$iy_0$)，

则方程（3.42）化为方程（3.45），而（3.44）化为

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2\beta-1}\gamma d\gamma}{\left[y+y_0{}^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2-2yy_0\cos\gamma\right]^{\beta+\frac{n-1}{2}}}$$

$$=2^{-n}B(\beta,\ \beta)\left(\frac{z}{yy_0}\right)^{\beta+\frac{n-1}{2}}F\left(\beta+\frac{n-1}{2},\beta,2\beta,z\right). \tag{3.46}$$

其中

$$z=\frac{4yy_0}{(y+y_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2}.$$

### 2.EPD方程的Poisson公式

通过前一段的讨论，给我们一种启示：欲将 $n+2\beta+1$ 维的位势方程的结果转化为广义轴对称位势方程的结果，只须前 $n$ 个坐标不动，而将后 $2\beta+1$ 个坐标化为广义极坐标，再让函数只与极矢 $r$ 有关，而与所有的辐角无关即可. 现在就按照这种思想将位势方程对球边值问题的Poisson公式推广到广义轴对称位势方程上去.

为简单起见，还是考虑三维的情形，已知此时 Poisson 公式为

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{R^2-r^2}{(R^2+r^2-2Rr\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f(\theta_0,\ \varphi_0)\sin\varphi_0\,d\theta_0\,d\varphi_0, \tag{3.47}$$

其中，

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0),$$

$$R^2+r^2-2Rr\cos r$$
$$=(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2$$
$$=(x_1-x_{10})^2+x_2^2+x_{20}^2+x_3^2+x_{30}^2-2x_2x_{20}-2x_3x_{30}$$
$$=(x_1-x_{10})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\theta\cos\theta_0-2yy_0\sin\theta\sin\theta_0$$
$$=(x_1-x_{10})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos(\theta-\theta_0).$$

所要求的轴对称解应与 $\theta$ 无关，可取 $\theta=0$，

而得

$$u(x_1,\ \sqrt{x_2^2+x_3^2})=u(x_1,\ y)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(\varphi_0)\sin\varphi_0 d\theta_0 d\varphi_0}{[(x_1-x_{10})^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\theta_0]^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}(R^2-r^2)f(\varphi_0)\sin\varphi_0\int_0^{2\pi}[(x_1-x_{10})^2+y^2+y_0^2$$
$$-2yy_0\cos\theta_0]^{-\frac{3}{2}}d\theta_0 d\varphi_0$$
$$=\frac{B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}{2\pi}(R^2-r^2)$$
$$\times\int_0^{\pi}\frac{F\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},1,\frac{4yy_0}{(x_1-x_{10})^2+(y+y_0)^2}\right)}{[(x_1-x_{10})^2+(y+y_0)^2]^{\frac{3}{2}}}f(\varphi_0)\sin\varphi_0 d\varphi_0. \tag{3.48}$$

这正是方程 $E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 半圆上的Dirichlet问题

$$\begin{cases} u_{x_1x_1}+u_{yy}+\dfrac{1}{y}u_y=0, \\ u|_{x^2+y^2=r^2}=f(\varphi), \\ \lim\limits_{y\to 0} yu_y(x, y)=0\ (1). \end{cases}$$

的解。

推广到一般的β，得到椭圆型EPD方程的半圆的Dirichlet问题的解为

$$u(x, y)=\frac{2^{2\beta-1}\Gamma^2(\beta)}{2\pi\Gamma^2(2\beta-1)}(R^2-r^2)$$

$$\times\int_0^\pi \frac{F\left(1+\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \dfrac{4yy_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right)}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^{\beta+1}}$$

$$\times f(\varphi_0)\sin^{2\beta}\varphi_0 d\varphi_0,\quad \beta>0. \tag{3.49}$$

公式（3.49）就称为EPD方程

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y=0$$

的Poisson积分。而

$$\frac{(R^2-r^2)F\left(1+\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ \dfrac{4yy_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right)}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^{\beta+1}}$$

称为“Poisson核”。

**3.超球多项式和β-调和**

F. Tricomi在研究以他的名字命名的方程

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{1}{3y}u_y=0. \tag{3.50}$$

时，曾引进了几类特解，其中，在极坐标$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=tg^{-1}\dfrac{y}{x}$下，求（3.50）的变数分离解，得到解系

$$r^nC_n^{\frac{1}{6}}(\cos\theta),\ y^{\frac{2}{3}}r^nC_n^{\frac{5}{6}}(\cos\theta),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\tag{3.51}$$

其中，$C_r^n(x)$称为超球多项式（或 Gegenbauer多项式），然而Tricomi只到此为止，并没有把问题引向深入。

现在来看，对于位势方程而言，和（3.51）相应的是什么？它可以启发我们考虑一些什么问题？先看二维情形．位势方程在极坐标系下变数分离导致解系：

$$r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.\tag{3.52}$$

对圆上的Dirichlet问题

$$u(r,\ \theta)|_{r=R}=f(\theta),$$

其解可表为

$$u(r,\ \theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\ \theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n.\tag{3.53}$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta_0)\cos n\theta_0 d\theta_0,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta_0)\sin n\theta_0 d\theta_0.$$

利用公式

$$\cos n\theta_0\cos n\theta+\sin n\theta_0\sin n\theta=\cos n(\theta_0-\theta),$$

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta_0-\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta_0-\theta)+r^2}.$$

（3.53）可以写为封闭式

$$u(r,\ \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0) \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta_0-\theta)+r^2} d\theta_0 \tag{3.53}$$

这就是二维的Poisson公式。

由此看出，（3.51）和（3.52）相当，对于（3.50）应该可以运用解系（3.51）解边值问题，建立起广义的"Poisson公式"等。但是，必须由高维的位势方程入手。

三维位势方程在球极坐标下的变数分离解系是：

$r^n Y_n(\theta,\varphi)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

其中

$$Y_n(\theta,\ \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\theta + B_{nm}\sin m\theta)\ P_n^{(m)}(\cos\varphi)$$

称为球（面）多项式，而$P_n^{(m)}$是Legendre函数。

对于球上的Dirichlet问题

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)|_{r=R} = f(\theta,\ \varphi),$$

其解可以表为

$$\begin{aligned} &u(r,\ \theta,\ \varphi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\ \varphi) \\ &= \frac{R}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{(R^2+r^2-2Rr\cos r)^{\frac{3}{2}}} f(\theta_0,\varphi_0)\sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

利用下列求和公式

$$\frac{1-r^2}{(r^2-2r\cos\gamma+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=p_0(\cos\gamma)+3rp_1(\cos\gamma)+\cdots+(2n+1)r^np_n(\cos\gamma)+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)r^np_n(\cos\gamma).$$

(3.55)

其中$p_n$是Legendre函数的特款—Legendre 多项式，它定义为下式按$r$展开的$n$次幂项的系数：

$$(r^2-2r\cos\gamma+1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=p_0(\cos\gamma)+rp_1(\cos\gamma)+\cdots+r^np_n(\cos\gamma)+\cdots. \quad (3.56)$$

则可将（3.54）写为另一形式

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta_0,\ \varphi_0)\sin\varphi_0\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{r}{R}\Big)^n(2n+1)$$
$$\times p_n(\cos r)\Big]d\theta_0 d\varphi_0$$

（3·55）式的导出并不困难，将（3·56）两端对$r$求导后，再乘以$2r$而得到等式

$$\frac{2r\cos r-2\gamma^2}{(r^2-2r\cos\gamma+1)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}2nr^np_n(\cos\gamma).$$

再和（3·56）相加，即得（3·55）.

这里，我们感兴趣的是轴对称情形。在（3·54）中，如$f$和$\theta_0$无关，则

$$u(r,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi_0)\sin\varphi_0 \times\left(\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta_0\right)d\varphi_0. \tag{3·57}$$

计算里面对$\theta_0$的积分

$$\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta_0$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos\gamma)d\theta_0,$$

由Legendre多项式的加法公式

$$p_n(\cos\gamma)$$

$$=p_n(\cos\varphi)p_n(\cos\varphi_0)+\sum_{l=0}^{n}2\frac{(n-l)!}{(n+l)!}p_n^{(l)}(\cos\varphi)$$

$$\times p_n^{(l)}(\cos\varphi_0)\cos(\theta-\theta_0).$$

两端对$\theta_0$积分而得

$$\int_0^{2\pi}p_n(\cos r)d\theta_0=2\pi p_n(\cos\varphi)p_n(\cos\varphi_0).$$

因此

$$\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta_0$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos\varphi)p_n(\cos\varphi_0). \tag{3·58}$$

代回到（3·57）中得

$$u(r,\varphi)$$

$$=\int_0^\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos\varphi)p_n(\cos\varphi_0)f(\varphi_0)\sin\varphi_0 d\varphi_0$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos\varphi)\int_0^\pi f(\varphi_0)\sin\varphi_0 d\varphi_0$$

当 $r=R$ 时，上式即为 $f(\varphi)$ 的级数展开式

$$f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)p_n(\cos\varphi)\int_0^\pi f(\varphi_0)p_n(\cos\varphi_0)\sin\varphi_0 d\varphi_0$$

它称为Legendre级数．记

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi f(\varphi_0)p_n(\cos\varphi_0)\sin\varphi_0 d\varphi_0,$$

则

$$f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n p_n(\cos\varphi).$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos\varphi).$$

$u(r,\varphi)$ 就是 $E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的解．我们的目的就是要把以上结果推广到一般的EPD方程上去．已知方程（3·3）的极坐标形式为

$$r^2u_{rr}+(1+2\beta)ru_r+u_{\theta\theta}+2\beta\operatorname{ctg}\theta\cdot u_\theta=0.$$

求变数分离解，令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则

$$r^2R''+(1+2\beta)rR'-n(n+2\beta)R=0,$$
$$\Theta''+2\beta\mathrm{ctg}\theta\cdot\Theta'+n(n+2\beta)\Theta=0. \tag{3·59}$$

这样，$R=r^n$，而（3·59）的解就是超球多项式$C_n^\beta(\cos\theta)$。令$\cos\theta=x$，则（3·59）变为

$$(1-x^2)\Theta''-(1+2\beta)x\Theta'+n(n+2\beta)\Theta=0.$$

$\beta=\frac{1}{2}$时，就这是Legendre方程，而$C_n^{\frac{1}{2}}(x)=p_n(x)$。

和（3·56）相对应的有

$$(r^2-2r\cos\theta+1)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\beta(\cos\theta)r^n. \tag{3.60}$$

这样一来，方程（3.3)有形式解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n C_n^\beta(\cos\theta). \tag{3.61}$$

$$u(1,\theta)=f(\theta)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n C_n^\beta(\cos\theta). \tag{3.62}$$

函数系$\left\{C_n^\beta(\cos\theta)\right\}$在区间［0，π］上关于测度$\sin^{2\beta}\theta\,d\theta$是正交的和完备的，因此，对（0，π）上的函数$f(\theta)$就有展开式

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n C_n^\beta(\cos\theta).$$

其中

$$a_n=\frac{1}{h\beta_n}\int_0^\pi f(\theta)C_n^\beta(\cos\theta)\sin^{2\beta}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{h_n^\beta}\int_{-1}^{1} f(x)\,C_n^\beta(x)\,(1-x^2)^{2\beta-1}dx.$$

$$h_n^\beta=\int_{-1}^{1}[C_n^\beta(x)]^2(1-x^2)^{2\beta-1}dx=\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}(2\beta)_n\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{(n+\beta)\,n!\,\Gamma(\beta)}.$$

可以证明，如果（3.62）一致收敛，则（3.61）绝对一致收敛，因而是（3.3)的精确解。

现在，我们再求（3.61）的封闭形式．如果它存在，就应是前面导出的“Poisson积分”。将$a_n$的表达式代入(3.61）中，得到

$$u(r,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\pi f(\theta_0)\frac{1}{h_n{}^\beta}r^nC_n^\beta(\cos\theta_0)\cdot C_n^\beta(\cos\theta)$$

$$\times\sin^{2\beta}\theta_0d\theta_0=\int_0^\pi f(\theta_0)\,p(r,\theta,\theta_0)\,\sin^{2\beta}\theta_0\,d\theta_0$$

其中

$$p(r,\ \theta,\ \theta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{h\beta_n}r^n\,C_n^\beta(\cos\theta_0)C_n^\beta(\cos\theta).\tag{3.63}$$

称为 Poisson 核．问题就在于求出它的封闭形式．（3.60）对$r$求导，再乘以$r$，得到

$$\frac{-\beta(2r^2-2r\cos\theta)}{(r^2-2r\cos\theta+1)^{\beta+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\beta(\cos\theta)nr^n$$

然后，（3.60）乘以β和上式相加得

$$\beta\frac{1-r^2}{(r^2-2r\cos\theta+1)^{\beta+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\beta+n)C_n^\beta(\cos\theta)r^n.\tag{3.64}$$

再引入超球多项式积分等式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi C_n^\beta(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{h_n\beta(\beta+n)}C_n^\beta(\cos\theta)C_n^\beta(\cos\theta_0).$$

则有

$$p(r, \theta, \theta_0)$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{h_n^\beta}r^nC_n^\beta(\cos\theta_0)C_n^\beta(\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty(\beta+n)r^n\int_0^\pi C_n^\beta(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)$$

$$\times\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\beta}{\pi}(1-r^2)$$

$$\int_0^\pi\frac{\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi}{[r^2-2r(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)+1]^{\beta+1}}. \tag{3.65}$$

这样一来，我们有

$$u(r, \theta)$$

$$=\int_0^\pi p(r, \theta, \theta_0)f(\theta_0)\sin^{2\beta}\theta_0 d\theta_0$$

$$=\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{f(\theta_0)\sin^{2\beta}\theta_0\sin^{2\beta-1}\varphi d\theta_0 d\varphi}{[r^2-2r(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)+1]^{\beta+1}}.$$

这就是方程（3.3)的Poisson积分．而核（3.65）还可化为超几何函数．实际上

$$p(r, \theta, \theta_0)$$

$$=\frac{\beta(1-r^2)}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2\beta-1}\varphi\,d\varphi}{[r^2-2r(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)+1]^{\beta+1}}$$

$$=\frac{\beta(1-r^2)}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2\beta-1}\varphi\,d\varphi}{[(x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\varphi]^{\beta+1}}$$

$$=2^{-\beta}\frac{(1-r^2)\beta}{\pi}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(z,\beta)}\left(\frac{z}{yy_0}\right)^{\beta+1}F(\beta+1,\ \beta,\ 2\beta,\ z),$$

其中

$$z=\frac{4yy_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}.$$

在结束本章时，我们要指出，由解系 $r^nC_n^{\beta}(\cos\theta)$ 得到的解，实质上对应于椭圆EPD 方程的正则解，即与问题（$b$）相应的如下问题的解：

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{2\beta}{y}u_y=0,\quad \beta>0,\\ u|_{x^2+y^2=R^2}=f(\theta),\\ \lim\limits_{y\to0}y^{2\beta}u_y=0.\end{cases}\tag{3.66}$$

若由另一解系 $y^{1-2\beta}r^nC_n^{1-\beta}(\cos\theta)$ 出发，我们可得与问题（$a$）相应的如下问题的解：

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{2\beta}{y}u_y=0,\quad \beta<\dfrac{1}{2},\\ u|_{x^2+y^2=R^2}=f(\theta),\\ u|_{y=0}=0.\end{cases}\tag{3.67}$$

事实上，由

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n y^{1-2\beta}r^n C_n^{1-\beta}(\cos\theta)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1-2\beta}C_n^{1-\beta}(\cos\theta)\sin^{1-2\beta}\theta,$$

应有

$$u(R,\theta)=f(\theta)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n C_n^{1-\beta}(\cos\theta)\sin^{1-2\beta}\theta.$$

类似于前面过程，以$C_m^{1-\beta}(\cos\theta)\sin\theta$从两边乘以上式，得到

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n C_n^{1-\beta}(\cos\theta)C_n^{1-\beta}(\cos\theta)\sin^{2-2\beta}\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}f(\theta)C_m^{1-\beta}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

但由于$C_n^{1-\beta}(\cos\theta)$关于$\sin^{2-2\beta}\theta$为测度的积分正交，故有

$$h_n^{1-\beta}a_n=\int_0^{\pi}f(\theta)C_n^{1-\beta}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

其中

$$h_n^{1-\beta}=\int_0^{\pi}[C_n^{1-\beta}(\cos\theta)]^2\sin^{2-2\beta}\theta\, d\theta.$$

于是

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\beta}\frac{1}{h_n^{1-\beta}}\int_0^{\pi}f(\theta_0)C_n^{1-\beta}(\cos\theta_0)\sin\theta_0 C_n^{1-\beta}$$

$$\times(\cos\theta)\sin^{1-2\beta}\theta\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1-2\beta}d\theta_0$$

$$=y^{1-2\beta}\int_0^{\pi}f(\theta_0)p(r,\theta,\theta_0)\sin\theta_0\, d\theta_0. \tag{3·68}$$

其中

$$p(r,\ \theta,\ \theta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{h_n^{1-\beta}}C_n^{1-\beta}(\cos\theta)C_n^{1-\beta}$$

$$\times(\cos\theta_0)\left(\frac{r}{R}\right)^n. \tag{3·69}$$

为简化运算起见，令 $R=1$. 利用类似于前面的方法，可得

$$(1-\beta)\frac{1-r^2}{(r^2-2r\cos\theta+1)^{2-\beta}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\beta)C_n^{1-\beta}(\cos\theta)r^n.$$

又由

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}C_n^{1-\beta}(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)\sin^{1-2\beta}\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{h_n^{1-\beta}(n+1-\beta)}C_n^{1-\beta}(\cos\theta)C_n^{1-\beta}(\cos\theta_0).$$

得到

$$p(r,\ \theta,\ \theta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{h_n^{1-\beta}}C_n^{1-\beta}(\cos\theta)\ C_n^{1-\beta}(\cos\theta_0)r^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1-\beta)r^n\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}C_n^{1-\beta}(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)$$

$$\times\sin^{1-2\beta}\varphi d\varphi=\frac{1-\beta}{\pi}(1-r^2)$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{\sin^{1-2\beta}\varphi\,d\varphi}{[r^2-2r(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)+1]^{2-\beta}},$$

于是

$$u(r, \theta) = y^{1-2\beta}\frac{(1-\beta)(1-r^2)}{\pi}$$

$$\times\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{f(\theta_0)\sin\theta_0 \sin^{1-2\beta}\varphi d\theta_0 d\varphi}{[r^2-2r(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)+1]^{2-\beta}}.$$

利用

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{1-2\beta}d\varphi}{[r^2-2r(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)+1]^{2-\beta}}$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin^{1-2\beta}\varphi\, d\varphi}{[(x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\varphi]^{2-\beta}}$$

$$=2^{\beta-1}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\left(\frac{z}{yy_0}\right)^{2-\beta}F(2-\beta, 1-\beta, 2-2\beta, z).$$

最后得到

$$u(r, \theta)=2^{\beta-1}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}\frac{(1-\beta)(1-r^2)}{\pi}y^{1-2\beta}$$

$$\times\int_0^\pi\left(\frac{z}{yy_0}\right)^{2-\beta}F(2-\beta, 1-\beta, 2-2\beta, z)\sin\theta f(\theta)d\theta$$

注意到（3·31）中$k_2$的值，立刻可见，它正是类似于问题（$a$）中$\tau=0$的解（（$a$）是半圆，这里是圆周）。

# 第四章　EPD方程的推广

EPD方程有很多推广，本章选取四个典型方程：奇性抛物方程；多条奇线的方程；奇线是一条特征线的方程以及高维空间的EPD方程。前三者不是EPD方程，但又和EPD方程有许多类似之处。

## §1. 奇性抛物方程

本节考虑含两个自变量（$x$，$t$）的奇性抛物方程

$$u_t = xu_{xx} + \beta u_x,\qquad \beta\text{为实数。} \tag{4.1}$$

与方程（4.1）有关的，被研究得较多的方程是下面两个奇性抛物方程

$$u_t = u_{xx} + \frac{2\alpha}{x}u_x,\quad \alpha\text{为实数，} \tag{4.2}$$

$$u_{xx} - x^p u_t = 0,\quad p\text{为实数。} \tag{4.3}$$

1975年以后，O. Arena[100, 101]研究了$\alpha > \frac{1}{2}$时的方程(4.2)，借助于Hankel变换，用分离变量法求出基本解，并用现代方法讨论了上述方程在$\frac{1}{4}$平面（$x>0$，$t>0$）上初值问题

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\quad 0 < x < \infty.$$

以后，又研究了$\beta=0$时的（4.1），在右半平面$X_+$（$x>0$）上的边值问题：

$$u(0,\ t)=4(t),\quad -\infty<t<\infty,$$

和在$\frac{1}{4}$平面$Q_+$上的初——边值问题：

$$u(0,\ t)=0,\quad 0<t<\infty,$$

$$u(x,\ 0)=h(x),\quad 0<x<\infty.$$

1970年，D. Colton〔69〕研究了（4.2）在条形区城$0<t<t_0$，$-\infty<x<\infty$上的Cauchy问题：

$$u(x,\ 0)=g(x),\quad -\infty<x<\infty.$$

利用分数阶积分 算 子，证 明 了$2\alpha\neq-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$且$g(x)$是$x$的偶函数时，上述问题存在唯一解。

1975年，C. A. Tersenov〔102, 103〕用古典方法研究了更一般的方程

$$u_t=(yu_{yy}+\beta u_y)\mathrm{Sgn}\,y+L[u].$$

其中$L[u]$是$R^n$中某区域上的严格椭圆算子；此外，M. Gevrey〔104〕，C. D. Pagani〔105〕也研究过类似的奇性抛物方程。所有这些研究中，基本解对方程的都起着很重要的作用。

本节，我们利用前章提到广义轴对称位势理论，导出（4.2）的基本解，接着通过自变量代换导出（4.1）、（4.3）的基本解，最后，讨论（4.2）的初值问题，初——边值问题和混合问题，得到了基本积分公式和间断公式。

**1. 基本解**

考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{4.4}$$

在极坐标$x_1 = r\cos\theta$，$x_2 = r\sin\theta$下，（4.4）化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}. \tag{4.5}$$

因此，（4.4）的以 t 轴为对称轴的轴对称解$u\left(t,\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$满足方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},\quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}. \tag{4.6}$$

众所周知，（4.4）的基本解是

$$u(x_1,\ x_2;\ t;\ \xi_1,\ \xi_2,\ \tau)$$

$$=\frac{1}{t-\tau}\exp\left\{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{4(t-\tau)}\right\}. \tag{4.7}$$

将上式写成极坐标形式，得到

$$u(r,\ t;\ r_0,\ \tau;\ \nu)$$

$$=\frac{1}{t-\tau}\exp\left\{-\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\nu}{4(t-\tau)}\right\}. \tag{4.8}$$

其中，$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，$\xi_1=r_0\cos\theta_0$，$\xi_2=r_0\sin\theta_0$，$\nu$是向径$r$与$r_0$之间的夹角，即$\nu=\theta-\theta_0$，将（4.8）对$\nu$由0到$2\pi$积分，再注意到对称性，有

$$\Gamma(r,\ t;r_0,\ \tau)$$

$$=\frac{1}{t-\tau}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\nu}{4(t-\tau)}\right\}d\nu. \tag{4.9}$$

不难验证，$\Gamma(r, t; r_0, \tau)$关于（$r, t$）满足（4.6），即$\alpha = \frac{1}{2}$时的（4.2）（$x = r$）。关于（$r_0$，$\tau$）满足如下方程

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2\alpha}{\xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}, \tag{4.10}$$

其中$\alpha = \frac{1}{2}$。

将以上结果推广到高维空间，由$m + 1$维热传导方程基本解

$$\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{m+1}{2}}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m+1} (x_i - \xi_i)^2 / 4(t-\tau)\right\}$$

出发，相应地有

$$\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{m+1}{2}}} \exp\left\{-(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\nu) / 4(t-\tau)\right\}.$$

上式乘以$m$维超球面面积元的Jacobi因子 $\sin^{m-1}\nu$，对$\nu$由 0 到$\pi$积分，得到

$$\Gamma(r, t; r_0, \tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^\pi \exp\left\{-\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\nu}{4(t-\tau)}\right\} \sin^{m-1}\nu \, d\nu. \tag{4.11}$$

类似地，（4.11）关于（$r$，$t$）满足$\alpha = \frac{m}{2}$时的（4.2），关于

$(r_0, \tau)$ 满足 $\alpha=\frac{m}{2}$ 时的方程（4.10），把 $m$ 改为 $2\alpha$，$\left(\alpha \geqslant \frac{1}{2}\right)$，则有：

**命题1** 函数

$$u(x, t; \xi, \tau)$$
$$=\frac{1}{(t-\tau)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi \exp\left\{-\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}{4(t-\tau)}\right\}\sin^{2\alpha-1}\theta\, d\theta. \tag{4.12}$$

关于（$x$, $t$）满足（4.2），关于（$\xi$, $\tau$）满足（4.10）。

**证明** 
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^\pi\left[\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}{4(t-\tau)^{\alpha+5/2}}-\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{(t-\tau)^{\alpha+3/2}}\right]$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}{4(t-\tau)}\right\}\sin^{2\alpha-1}\theta\, d\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\int_0^\pi\frac{x-\xi\cos\theta}{2(t-\tau)^{\alpha+3/2}}\exp\left\{-\left(\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}{4(t-\tau)}\right)\right\}$$
$$\times\sin^{2\alpha-1}\theta\, d\theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_0^\pi\left[\frac{(x-\xi\cos\theta)^2}{4(t-\tau)^{\alpha+5/2}}-\frac{1}{2(t-\tau)^{\alpha+3/2}}\right]$$
$$\times\exp\left\{-(x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta)/4(t-\tau)\right\}\sin^{2\alpha-1}\theta\, d\theta.$$

因此，$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$

$$=\frac{1}{2(t-\tau)^{\alpha+3/2}}\int_0^\pi\left(\frac{\xi^2\sin^2\theta}{2(t-\tau)}-\frac{2\alpha\xi\cos\theta}{x}\right)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}{4(t-\tau)}\right\}\sin^{2\alpha-1}\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2(t-\tau)^{\alpha+3/2}}\cdot\frac{\xi}{x}\int_0^\pi\frac{d}{d\theta}\left\{\sin^{2\alpha}\theta\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}{4(t-\tau)}\right\}\right\}d\theta=0.$$

后一结论，类似可验证。不难验证下面的命题：

**命题** 2　如果$V(\xi,\tau)$是方程（4.10）的解，则 $W=\xi^{2\alpha}V(\xi,\tau)$满足（4.2）的共轭方程

$$-\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-\frac{2\alpha}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{2\alpha}{\xi^2}u. \tag{4.13}$$

由上述两个命题，立即可得：

**推论**　函数

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)=\frac{\xi^{2\alpha}}{(t-\tau)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi\exp\left\{-\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\theta}{4(t-\tau)}\right\}\sin^{2\alpha-1}\theta d\theta. \tag{4.14}$$

关于（$x$，$t$）满足方程（4.2），关于（$\xi$，$\tau$）满足（4.2）的共轭方程（4.13）。

最后，利用虚变元Bessel函数的积分表达式：

$$I_\nu(z)=z^\nu\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta,$$

和作变换 $z=\dfrac{x\xi}{\alpha(t-\tau)}$，可将（4.14）改写为

$$\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ \tau)$$

$$=\frac{\xi^{2\alpha}(x\xi)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2(t-\tau)}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}}I_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{x\xi}{2(t-\tau)}\right). \qquad (4.15)$$

（4.15）与〔104〕中的基本解一致，如果再注意到虚变元Bessel方程的两个解 $I_{\pm\nu}(z)$，又可得到

$$\Gamma_2(x,\ t;\xi,\ \tau)$$

$$=\frac{\xi^{2\alpha}(x\xi)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2(t-\tau)}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}}I_{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\frac{x\xi}{2(t-\tau)}\right). \qquad (4.16)$$

关于（$x$，$t$）满足（4.2），关于（$\xi$，$\tau$）满足（4.13），它是（4.2）当 $\alpha<\dfrac{1}{2}$ 时的基本解。

注1　若令 $t'=4t$，$x'=x^2$，则（4.2）变为

$$u_{t'}=x'\,u_{x'x'}+\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{x'}.$$

这正是（4.1）型方程 $\left(\beta=\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$. 将（4.15）、（4.16）中 $\alpha$ 代之为 $\beta-\dfrac{1}{2}$，$x\xi$ 代之为 $\sqrt{x\xi}$，$t$ 代为 $\dfrac{t'}{4}$，就得到

$$\Gamma_3(x,\ t;\xi,\ \tau)$$

$$=\frac{\xi^{\beta-1}(x\xi)^{\frac{1-\beta}{2}}}{t-\tau}e^{-\frac{x+\xi}{t-\tau}}I_{\beta-1}\left(\frac{2\sqrt{x\xi}}{t-\tau}\right)$$

和

$$\Gamma_4(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$$

$$=\frac{\xi^{\beta-1}(x\xi)^{\frac{1-\beta}{2}}}{t-\tau}e^{-\frac{x+\xi}{t-\tau}}I_{1-\beta}\left(\frac{2\sqrt{x\xi}}{t-\tau}\right).$$

这正是（4.1）当$\beta\geqslant 1$和$\beta<1$时的基本解。

注 2　若令$t'=\left(\frac{p+2}{2}\right)^2 t$，$x'=x^{\frac{p+2}{2}}$，则(4.3)化为(4.2)型方程

$$u_{t'}=u_{x'x'}+\frac{\frac{p}{p+2}}{x'}u_{x'}\quad p\neq 2.$$

由于（4.3）是自共轭方程，在（4.14）、（4.15）中，去掉因子，将$\alpha$换为$\frac{p}{2(p+2)}$，$x\xi$换为$(x\xi)^{\frac{p+2}{2}}$，$t$换为$\frac{(p+2)^2}{4}t$，得到两个函数

$$\Gamma_5(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$$

$$=\frac{\sqrt{x\xi}}{(p+2)(t-\tau)}e^{-\frac{x^{p+2}+\xi^{p+2}}{(p+2)^2(t-\tau)}}I_{-\frac{1}{p+2}}\left(\frac{2(x\xi)^{\frac{p+2}{2}}}{(p+2)^2(t-\tau)}\right)$$

和

$$\Gamma_6(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$$

$$=\frac{\sqrt{x\xi}}{(p+2)(t-\tau)}e^{-\frac{x^{p+2}+\xi^{p+2}}{(p+2)^2(t-\tau)}}I_{\frac{1}{p+2}}\left(\frac{2(\xi x)^{\frac{p+2}{2}}}{(p+2)^2(t-\tau)}\right).$$

这两个函数正是（4.3）的基本解，与 Gevrey〔104〕中所用的两个函数一致。

**2.基本解性质和基本积分公式**

注意到虚变元Bessel函数

$$I_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k}$$

和渐近估计 $I_\nu(x)\approx(2\pi x)^{-\frac{1}{2}}e^x$，于是当 $x$ 充分大时，有$I_\nu(x)\leqslant C_\nu x^{-\frac{1}{2}}e^x$，而当 $0<x<1$ 时，注意到 $\nu\geqslant-\frac{1}{2}$时，有

$$x^{-\frac{1}{2}}I_\nu(x)\leqslant x^{-\nu}I_\nu(x)\leqslant C_\nu' e^x.$$

从而只须适当选取$C_\nu$，有

$$I_\nu(x)\leqslant C_\nu x^{-\frac{1}{2}}e^x,\quad \nu\geqslant-\frac{1}{2},\quad x>0.$$

另一方面，$\because \nu\geqslant-\frac{1}{2}$，$\therefore x$ 充分大时，用渐近估计，有$I_\nu(x)\leqslant C_\nu' x^\nu e^x$，而利用$I_\nu(x)$定义，可得对一切 $x>0$，又有

$$I_\nu(x)\leqslant C_\nu x^\nu e^x,\quad x>0,\quad \nu\geqslant\frac{1}{2}.$$

将上式用于$\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ 0)$和$\Gamma_2(x,\ t;\xi,\ 0)$，成立如下估计

$$|\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ 0)|\leqslant C_\alpha\frac{\xi^\alpha x^{-\alpha}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},\quad \alpha\geqslant0,$$

$$|\Gamma_2(x,\ t;\xi,\ 0)|\leqslant C_\alpha\frac{\xi^\alpha x^{-\alpha}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},\quad \alpha\leqslant 1,$$

$$x>0,\ \xi>0,\ t>0, \tag{4.16}$$

和对一切$x>0$，$\xi>0$，$t>0$，有

$$|\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ 0)|\leqslant C_\alpha\frac{\xi^{2\alpha}}{t^{\alpha+1/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},\quad \alpha\geqslant 0,$$

$$|\Gamma_2(x,\ t;\xi,\ 0)|\leqslant C_\alpha\frac{\xi x^{1-2\alpha}}{t^{3/2-\alpha}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},\quad \alpha\leqslant 1. \tag{4.17}$$

**定理1** 设$\varphi(x)$在$(0,\ +\infty)$上连续有界，则函数

$$u(x,\ t)=\int_0^{+\infty}\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ 0)\varphi(\xi)d\xi,\quad \alpha\geqslant 0, \tag{4.18}$$

在$\frac{1}{4}$平面$Q_+(x>0,\ t>0)$上无穷次可微，它的各阶偏导数可在积分号下求导而得到。且在$Q_+$上，$u(x,\ t)$一致有界。

**证明** 设$|\varphi(x)|\leqslant C$，$0<x<\infty$，由（4.18）有

$$u(x,\ t)=\int_0^{2x}\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ 0)\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{2x}^{\infty}\Gamma_1(x_1,\ t;\xi,\ 0)\varphi(\xi)d\xi$$

$$=I_1+I_2.$$

由（4.17）的第一式，得到

$$|I_1|\leqslant C\int_0^{2x}\frac{\xi^\alpha x^{-\alpha}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

$$\leqslant 2^{\alpha}\cdot C\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

$$\leqslant\sqrt{\pi}\,2^{\alpha}\cdot C.$$

由（4.17）第三式，得到

$$|I_2|\leqslant C\int_{2x}^{\infty}\frac{\xi^{2\alpha}}{t^{\alpha+1/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

$$\leqslant C\int_{0}^{\infty}\frac{\xi^{2\alpha}}{t^{\alpha+1/2}}e^{-\frac{\xi^2}{16t}}d\xi$$

$$=C\int_{0}^{\infty}y^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-y}dy$$

$$=C\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

因此，在$Q_+$上，$|u(x,\ t)|\leqslant C$，$C$仅与$\alpha$有关。

至于$u(x,\ t)$的可微性由（4.18）中积分关于$x$，$t$一致收敛性可得

**定理 2**　设$\varphi(x)$在$(0,\ +\infty)$上连续有界，则函数

$$u(x,\ t)=\int_{0}^{\infty}\Gamma_2(x,\ t;\ \xi,\ 0)\varphi(\xi)d\xi,\quad \alpha\leqslant\frac{1}{2},\tag{4.19}$$

在$Q_+$上无穷次可微，它的各阶偏导数可在积分号下求导而得到，且在$Q_+$上$u(x,\ t)$一致有界。

**证明**　设$|\varphi(x)|\leqslant C$，$0<x<\infty$，由（4.19）有

$$u(x,\ t)=\left(\int_0^{\frac{x}{2}}+\int_{\frac{x}{2}}^{2x}+\int_{2x}^{\infty}\right)\Gamma_2(x,\ t;\ \xi,\ 0)\varphi(\xi)d\xi$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

由（4.17）第四式，有

$$|I_1|\leqslant C\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{\xi x^{1-2\alpha}}{t^{3/2-\alpha}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

$$\leqslant C\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{x^{2-2\alpha}}{t^{3/2-\alpha}}e^{-\frac{x^2}{16t}}d\xi$$

$$\leqslant C\left(\frac{x^2}{t}\right)^{\frac{3}{2}-\alpha}e^{-\frac{x^2}{16t}}.$$

由（4.17）第二式，有

$$|I_2|\leqslant C\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\frac{\xi^{\alpha}x^{-\alpha}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

$$\leqslant C\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

$$\leqslant C\sqrt{\pi}.$$

又据（4.17）第四式，对$I_3$有

$$|I_3|\leqslant C\int_{2x}^{+\infty}\frac{\xi x^{1-2\alpha}}{t^{3/2-\alpha}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

$$\leqslant C\int_0^{+\infty}\frac{\xi^{2-2\alpha}}{t^{3/2-\alpha}}e^{-\frac{\xi^2}{16t}}d\xi$$

$$\leqslant C\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right).$$

从而，在$Q_+$上，$|u(x,\ t)|\leqslant C$ · $C$仅与$\alpha$有关，$u(x,\ t)$可微性由（4.19）一致收敛性可得。

**定理3**　设$\varphi(x)$是$[a,\ b]$上的连续函数，则当$(x,t)$沿整个在$t=h$上方的路线趋于$(x_0,\ h)$时，恒有

$$\lim\int_a^b\varphi(\xi)\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ h)d\xi=\varphi(x_0). \tag{4.20}$$

其中，$0<a<b<+\infty$，$a<x_0<b$，$\alpha\geqslant 0$。

**证明**　首先，不难通过积分变换，得到

若$F(x)$在$[a,\ b]$上可积，则

$$\lim_{y\to 0^+}\int_a^b\frac{F(x)}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}dx$$

$$=\sqrt{\pi}(F(+0)+F(-0)),\ a<0<b,$$

$$\lim_{y\to 0^+}\int_a^b\frac{F(x)}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}dx=\begin{cases}\sqrt{\pi}F(+0), & 若\ 0=a<b,\\ \sqrt{\pi}F(-0), & 若\ a<b=0.\end{cases}$$

若$(x,t)$沿$t$轴方向趋近于$(x_0,h)$，则由$\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ \tau)$的渐近估计式和上式，有

$$\lim_{t\to h}\int_a^b\Gamma_1(x_0,\ t;\xi,\ h)\varphi(\xi)d\xi$$

$$=\lim_{t\to h}\int_a^b \frac{\varphi(\xi)\xi^{\alpha}x_0^{-\alpha}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t-h}} e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4(t-h)}} d\xi$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lim_{t\to h}\int_{a-x_0}^{b-x_0} \frac{\varphi(x_0+y)(x_0+y)^{\alpha}x_0^{-\alpha}}{\sqrt{t-h}} e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}} dy$$

$$=\varphi(x_0).$$

若（$x$，$t$）沿任何整个在 $t=h$ 上方的路线趋于（$x_0$，$h$），我们有

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x+y)(x+y)^{\alpha}x^{-\alpha}}{\sqrt{t-h}} e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}} dy$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{a-x}^{b-x} \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{t-h}} e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}} dy$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{a-x}^{b-x} \left[\frac{\varphi(x+y)(x+y)^{\alpha}}{\sqrt{t-h}\cdot x^{\alpha}}-\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{t-h}}\right] e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}} dy.$$

由于考虑仅是（$x$，$t$）$\longrightarrow$（$x_0$，$h$）积分性态，显然，我们可将（$x$，$t$）限制在（$x_0$，$h$）的一个小邻域内，从而$\Gamma_1$的渐近估计仍成立，于是上式右端第一式可改写为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a-x}{2\sqrt{t-h}}}^{\frac{b-x}{2\sqrt{t-h}}} \varphi(x_0)e^{-y^2}dy.$$

从而 $x\longrightarrow x_0$，$t\longrightarrow h$ 时，由 $a-x<0<b-x$，推出上式以 $\varphi(x_0)$为极限．故只须证明第二式以 0 为极限．事实上，有

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{a-x}^{b-x}\left\{\frac{\varphi(x+y)(x+y)^{\alpha}}{\sqrt{t-h}\cdot x^{\alpha}}-\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{t-h}}\right\}e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}}dy$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\int_{a-x}^{-\varepsilon}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{b-x}\right)\left\{\frac{\varphi(x+y)(x+y)^{\alpha}}{\sqrt{t-h}\cdot x^{\alpha}}\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{t-h}}\right\}\cdot e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}}dy.$$

其中 $\varepsilon$ 是很小的正数.

令 $\delta$ 是 $|x-x_0|<\varepsilon$，$|y|<\varepsilon$ 上 $\varphi(x+y)\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\alpha}-\varphi(x_0)$ 的上界，则有

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left\{\frac{\varphi(x+y)(x+y)^{\alpha}}{\sqrt{t-h}\cdot x^{\alpha}}-\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{t-h}}\right\}\right.$$

$$\left.\times e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}}dy\right|<\delta,$$

上述积分可任意小，只须取 $\varepsilon$ 充分小. 由此取定 $\varepsilon$ 后，令 $t-h\longrightarrow 0$，有

$$\lim\int_{a-x}^{\varepsilon}\frac{\varphi(x+y)\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\alpha}-\varphi(x_0)}{\sqrt{t-h}}e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}}dy$$

$$=\lim[\varphi(x)-\varphi(x_0)]=0$$

和

$$\lim\int_{\varepsilon}^{b-x} \frac{\varphi(x+y)\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\alpha}-\varphi(x_0)}{\sqrt{t-h}} e^{-\frac{y^2}{4(t-h)}} dy$$

$$=0.$$

类似地，有

**理定 4** 设$\varphi(x)$是$[a,\ b]$上的连续函数，则当$(x,\ t)$沿$t=h$上方路线趋于$(x_0,\ h)$时，恒有

$$\lim\int_{a}^{b}\varphi(\xi)\Gamma_2(x,\ t;\ \xi,\ h)d\xi=\varphi(x_0), \tag{4.21}$$

其中$0<a<b<\infty$，$a<x_0<b$；$\alpha\leqslant\frac{1}{2}$。

下面我们导出基本积分公式，设

$$L[u]\equiv u_t-u_{xx}-\frac{2\alpha}{x}u_{\alpha},$$

$$L^*[v]\equiv -v_t-v_{xx}+\frac{2\alpha}{x}v_x-\frac{2\alpha}{x^2}v.$$

设$Q_+$区域中，$AB$、$EF$是两条特征线$t=a$和$t=b$，$AE$、$BF$是两段弧（图7），记为$x=X_1(t)$和$x=X_2(t)$，在$t\in[a,\ b]$内具有连续微商，$M$是上述四条曲线所围区域中任一点，$PQ$是过$M$点的特征线，$D$是$ABQP$所围区域，沿$D$相应的Gveen公式为

$$\iint_D \left[vL[u]-uL^*[v]\right]dxdt$$

$$=\int_{o}-(uv)\,dx+\left(-vu_x+v_xu-\frac{2\alpha uv}{x}\right)dt.$$

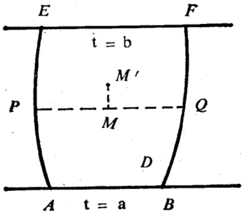



图 7

**定理 5**　若 $u$ 为方程

$$u_t - u_{xx} - \frac{2\alpha}{x}u_x = f(x, t)$$

在 $Q_+$ 内的正则解，则当 $\alpha \geqslant 0$ 时，

$$\int_{PABQ} u(\xi, \tau)\Gamma_1(x, t; \xi, \tau)d\xi + \left(\Gamma_1\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi} + \frac{2\alpha u\Gamma_1}{\xi}\right)d\tau + \iint_D \Gamma_1(x, t; \xi, \tau)f(\xi, \tau)d\xi d\tau$$

$$= \begin{cases} u(x, t), \text{当}(x, t)\text{在}D_1\text{内}, \\ \frac{1}{2}u(x, t), \text{当}(x, t)\text{在边界}AE\text{或}BF\text{上}, \\ 0, \text{当}(x, t)\text{在}D_1\text{外}. \end{cases} \quad (4.22)$$

其中 $D_1$ 是 $AB$，$EF$，$AE$ 和 $BF$ 所围区域.

当 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时，对 $\Gamma_2(x, t; \xi, \tau)$ 有类似的公式.

**证明** 在$D_1$内任取一点$M(x_0, t_0)$，另取一点$M'(x_0, t_0+h)$，$h>0$，取$u$为方程在$Q_+$内的正则解，$v$为$\Gamma_1(x_0, t_2+h; \xi, \tau)$，由于$v$是$L^*[u]=0$在$D$内的正则解，因此

$$\int_{PABQP} u(\xi, \tau)\Gamma_1(x_0, t_0+h; \xi, \tau)d\xi$$
$$+\left[\Gamma_1(x_0, t_0+h; \xi, \tau)\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial \Gamma_1(x_0, t_0+h, \xi, \tau)}{\partial \xi}\right.$$
$$\left.+\frac{2\alpha u\Gamma_1}{\xi}\right]d\tau+\iint_D \Gamma_1(x_0, t_0+h; \xi, \tau)f(\xi, \tau)d\xi d\tau$$
$$=0.$$

上式可写为

$$\int_{PQ} u(\xi, t_0)\Gamma_1(x_0, t_0+h; \xi, t_0)d\xi$$
$$=\int_{PABQ} u\Gamma_1 d\xi+\left(\Gamma_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{2\alpha u\Gamma_1}{\xi}-u\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi}\right)d\tau$$
$$+\iint_D \Gamma_1(x_0, t_0+h; \xi, \tau)f(\xi, \tau)d\xi d\tau. \qquad (4.23)$$

当$(x_0, t_0)$在$PQ$之间时，上式右边是$h$的连续函数，由定理3，左边$\longrightarrow u(x_0, t_0)$(当$h\longrightarrow 0$)。当$(x_0, t_0)$在$PQ$之外，上式右边也是$h$的连续函数，而左边易证当$h\longrightarrow 0$时，以0为极限，当$(x_0, t_0)$在$AE$或$BF$上时，左边以$\frac{1}{2}u(x_0, t_0)$为极限，而右边第二项是$h$的连续函数，第一项由于当$t-\tau$充分小时，

$$\Gamma_1\approx\frac{\xi^\alpha x^{-\alpha}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}},$$

从而

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}=\frac{\xi^{2\alpha}(x\xi)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{4(t-\tau)}\left[\frac{x}{t-\tau}I_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{x\xi}{2(t-\tau)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\xi}{t-\tau}I_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{x\xi}{2(t-\tau)}\right)\right]e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}}$$

$$\approx\frac{\xi^{\alpha}x^{-\alpha}}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}(x-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}.$$

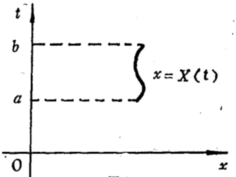


图 8

利用 $x=X_1(t)$，$x=X_2(t)$ 在 $[a,\ b]$ 上有连续一阶微商（图 8），不难证明（4.23）右边第一项是 $h$ 的连续函数，至此定理证完。

设曲线 $c$：$x=X(t)$ 在 $t\in[a,\ b]$ 上有一阶微商，它与 $[a,\ b]$ 间每条特征线只交于一点，$\psi(t)$ 是 $[a,\ b]$ 上连续函数，定义

$$u(x,\ t)=\int_a^t\left(\frac{\partial\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ \tau)}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1(x,\ t;\xi,\ \tau)}{\xi}\right)_{\xi=X(\tau)}\psi(\tau)d\tau,$$

$$\alpha\geqslant 0. \tag{4.24}$$

**定理 6** 由（4.24）定义的 $u(x,\ t)$ 在与 $C$ 无公共点的区域内是 $C^\infty$ 函数，且当 $(x,\ t)$ 由 $C$ 的右（左）方趋于 $C$ 上一点

$(x_0, t_0)$时，有

$$\lim u(x, t) = \pm\frac{1}{2}\psi(t_0) + \int_a^{t_0}\psi(\tau)\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi} - \frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\substack{x=x_0\\ t=t_0\\ \xi=X(\tau)}} d\tau, \quad \alpha\geqslant 0, \tag{4.25}$$

从右方趋于$(x_0, t_0)$取$+\frac{1}{2}\psi(t_0)$，从左方取$-\frac{1}{2}\psi(t_0)$。

又当$\alpha<\frac{1}{2}$时，对$\Gamma_2$也有类似的结果。（4.25）称为间断公式。

**证明** 利用基本积分公式（4.22），不失一般性，可设$\psi(t)$是一多项式（由Weierstrass的多项式逼近定理），于是$\psi(t)$满足

$$u_t - u_{xx} - \frac{2\alpha}{x}u_x = \psi'(t).$$

设$C$是定理4.5中$AE$，由（4.22）得

$$\int_a^b\psi(a)\Gamma_1(x,t;\xi,a)\,d\xi + \int_a^t\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi} - \frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=X(\tau)}\psi(\tau)\,d\tau$$

$$+\int_a^t\left(\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi} - \frac{\partial\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=x(\tau)}\psi(\tau)\,d\tau +$$

$$\iint_D\Gamma_1(x, t; \xi, \tau)\psi'(\tau)\,d\xi d\tau$$

$$=\begin{cases}\psi(t)，当(x, t)在C的右边，& \text{(i)}\\ \frac{1}{2}\psi(t)，当(x, t)\in C， & \text{(ii)}\\ 0，\quad 当(x, t)在C的左方。& \text{(iii)}\end{cases}$$

(ii)中，令 $(x, t)=(x_0, t_0)$，用(i)减(ii)，再令 $(x, t)$ 从$C$右边趋于 $(x_0, t_0)$，即得（4.25）第一式；(iii) 减去(ii)，令 $(x, t)$ 从$C$左方趋于 $(x_0, t_0)$，即得（4.25）另一式。

**3. $Q_+$上的初值问题**

考虑问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\dfrac{2\alpha}{x}u_x, & (x, t)\in Q_+, \quad \alpha>0, \\ u(x, 0)=\varphi(x), & 0<x<\infty. \end{cases} \tag{4.26}$$

**定理7** 设$\varphi(x)$在$(0, +\infty)$上连续有界，则函数

$$u(x, t)=\int_0^\infty \Gamma_1(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi$$

是（4.26）的$C^\infty$有界解，且当$\dfrac{\partial u}{\partial x}$有界时，$u$是唯一的。

**证明** 由定理1推得（4.27）是（4.26）方程的解，只须验证满足初值条件。设$x_0$是$t=0$上任意一点，我们要证$(x, t)\longrightarrow(x_0, 0)$时，（4.27）$\longrightarrow\varphi(x_0)$。由于仅考虑$x_0$邻域内$u(x, t)$的性态，不妨设$\dfrac{x_0}{2}<x<2x_0$，有

$$\int_0^\infty \Gamma_1(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi$$

$$=\left(\int_0^{\frac{x_0}{2}}+\int_{\frac{x_0}{2}}^{4x_0}+\int_{4x_0}^\infty\right)\Gamma_1(x, t; \xi, 0)d\xi$$

记

$$\equiv I_1+I_2+I_3.$$

由定理3，$I_2\longrightarrow\varphi(x_0)$，$(x, t)\longrightarrow(x_0, 0)$；而$I_1$，$I_3$易

通过积分变换证明 $t\longrightarrow 0$ 时，均趋于 0．设 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 有界，由(4.22)，将 $AE$ 取作 $x=0$，$BF$ 取作 $x=R>0$，则

$$u(x,\ t)=\int_0^R \Gamma_1(x,\ t;\ \xi,\ 0)\varphi(\xi)d\xi$$

$$-\int_0^t\left(\Gamma_1\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi}+\frac{2\alpha u\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=0}d\tau$$

$$+\int_0^t\left(\Gamma_1\frac{\partial u}{\partial \xi}-u\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi}+\frac{2\alpha u\Gamma_1}{\partial \xi}\right)_{\xi=R}d\tau.$$

由于 $u$ 和 $u_x$ 在 $Q_+$ 上一致有界，且 $\Gamma_1$ 含有因子 $\xi^{2\alpha}$，$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}$ 含有因子 $\xi^{2\alpha+1}$，$\alpha>0$，故上式右边第二项为 0．利用(4.16)，

$$|\Gamma_1(x,\ t;\ \xi,\ \tau)|\leqslant c\frac{\xi^\alpha x^{-\alpha}}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}.$$

运用类似于得到（4.16）的技巧，不难得到

$$\left|\frac{\partial \Gamma_1(x,\ t;\ \xi,\ \tau)}{\partial \xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1(x,\ t;\ \xi,\ \tau)}{\xi}\right|$$

$$\leqslant c\frac{\xi^{\alpha+1}+\xi^\alpha x}{x^\alpha(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}.$$

于是，我们只须证明：

$$\int_0^t \frac{R^\alpha}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}d\tau \text{和} \int_0^t \frac{R^{\alpha+1}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}d\tau.$$

当$R\longrightarrow\infty$时都趋于零。事实上，对任何固定的$x$，取$0<\varepsilon<\frac{1}{4t}$，则$0<\varepsilon<\frac{1}{4(t-\tau)}$，不难证明，当$R$充分大时，

$$e^{\varepsilon R-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)}}<1,$$

$$e^{\varepsilon R-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)}+\ln\frac{R}{t-\tau}}<1.$$

由于

$$\int_0^t\frac{R^\alpha}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)}}d\tau$$

$$=e^{-\varepsilon R}\int_0^t\frac{R^\alpha}{\sqrt{t-\tau}}e^{\varepsilon R-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)}}d\tau$$

$$<2\sqrt{t}R^\alpha e^{-\varepsilon R},$$

$$\int_0^t\frac{R^{\alpha+1}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)}}d\tau$$

$$=e^{-\varepsilon R}\int_0^t R^\alpha\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{\varepsilon R-\frac{(x-R)^2}{4(t-\tau)}+\ln\frac{R}{t-\tau}}d\tau$$

$$<2\sqrt{t}R^\alpha e^{-\varepsilon R},$$

当$R\longrightarrow\infty$，上面两式均以0为极限，这就证明了$u$是唯一的。至于关于$\varphi(x)$的连续依赖性，则是很容易导出的了。

**4. $Q_+$上的初一边值问题**

现在考虑：

$$u_t = u_{xx} + \frac{2\alpha}{x} u_x, \quad (x, \ t) \in Q_+, \tag{4.2}$$

$$u(x, \ 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag*{(4.28)$_1$}$$

$$u(0, \ t) = \psi(x), \quad 0 < t < \infty. \tag*{(4.28)$_2$}$$

由定理2，当$\varphi(\xi)$在$\xi \in (0, +\infty)$内连续有界时，

$$u_1(x, \ t) = \int_0^\infty \Gamma_2(x, \ t; \ \xi, \ 0)\varphi(\xi)d\xi, \quad \alpha < \frac{1}{2}$$

是（4.2）的有界$C^\infty$类解，由定理2，类似于定理4.7，可证明$u_1(x, \ t)$满足（4.28）$_1$，注意到$\Gamma_1$中含有因子$x^{1-2\alpha}$，$\alpha < \frac{1}{2}$，故当$x = 0$时，$u_1(x, \ t) = 0$。

再考虑

$$u_2(x, \ t) = \frac{2^{2\alpha-1} x^{1-2\alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - \frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}$$

$$\times \psi(\tau) d\tau, \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$

直接验证表明，$u_2(x, \ t)$满足（4.2）。又在上式中令$\frac{x^2}{4(t-\tau)} = y$，则有

$$u_2(x, \ t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)} \int_{\frac{x^2}{4t}}^\infty y^{\frac{1}{2} - \alpha - 1} \psi\left(t - \frac{x^2}{4y}\right) e^{-y} dy.$$

由$\psi$的有界性，立得$u_2$有界（一致），注意到$\psi$的连续性，即可得$u_2$满足（4.28）$_2$，且由于上述积分关于（$x$，$t$）一致收敛，故$u_2$是$C^\infty$类函数，而由于被积函数绝对可积，令$t \longrightarrow 0_+$，即得$u_2(x, 0)=0$。这样，我们就有：

**定理 8** 设$\varphi$和$\psi$在$(0,\infty)$内连续有界，则当$\alpha<\frac{1}{2}$时，问题（4.2）、（4.28）存在唯一的$C^\infty$有界解$u$，由下式给出

$$u(x, t)=\int_0^\infty \Gamma_2(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$\frac{x^{1-2\alpha}}{2^{1-2\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2-\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\psi(\tau)d\tau. \tag{4·29}$$

**证明** 只须证明唯一性，因此，我们先有：

**引理** 设$u(x,t)$在矩形$R:\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta, 0\leqslant t\leqslant T\}$上连续，且在矩形内部满足(4·2)，则它在矩形两个侧边$\{x=\alpha, x=\beta, 0\leqslant t\leqslant T\}$和底边$\{t=0, \alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$上取到最大值或最小值。

其证明类似于抛物方程混合问题极限原理，只须注意到，若以$M, m$分别表示$R$和$R$的两侧边及底边上的最大值，若$M>m$，则令

$$v(x, t)=u(x, t)+\frac{M-m}{2T}(t^*-t),$$

其中$(x^*, t^*)\in\dot{R}$，$u(x^*, t^*)=M$。$v(x, t)$的最大值点仍在$R$的内部$\dot{R}$，这是不可能的，因为由极大值点性质，一方面

有

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\geqslant 0,$$

另一方面，由$u_1$满足（4·2），又有

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial \alpha}{x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{M-m}{2T}<0.$$

**定理 8 的证明**：只须证明$\varphi=\psi=0$时，$u\equiv 0$；设在$Q_+$上，$|u|\leqslant c$，$(x_0, t_0)$是$Q_+$内任一点，$(x_0>0, t_0>0)$，考虑$R_0$：$0\leqslant t\leqslant t_0$，$0\leqslant x\leqslant L$，$L$是任意正数，作函数

$$v(x, t)=\frac{2c}{L^2}\left[\frac{x^2}{2}+(1+2\alpha)t\right],\quad 1+2\alpha\geqslant 0, \tag{4.30}$$

和

$$v(x, t)=\frac{2c}{L^2}\left[\frac{x^2}{2}+(1+2\alpha)(t-t_0)\right],\quad 1+2\alpha<0. \tag{4.31}$$

$v(x, t)$在$R_0$上连续，且在$R_0$内部满足(4.2)，而对(4.30)，$v(x, 0)\geqslant 0=u(x, 0)$，

$$v(0, t)=\frac{2c}{L^2}(1+2\alpha)t\geqslant 0=u(0, t),$$

$$v(L, t)=c+(1+2\alpha)t\geqslant c\geqslant u(L, t).$$

因此，在$R_0$的侧边及底边上成立$v(x, t)\geqslant u(x, t)$，从而由引理知，在$R_0$中有$u(x, t)\leqslant v(x, t)$；类似可证$-v(x, t)\leqslant u(x, t)$，因此，在$R_0$上有

$$|u(x, t)|\leqslant\frac{2c}{L}\left[\frac{x^2}{2}+(1+2\alpha)t\right],$$

特别取$(x_0, t_0)$，有

$$|u(x_0, t_0)| \leqslant \frac{2c}{L}\left\{\frac{x_0^2}{2}+(1+2\alpha)t_0\right\}.$$

令$L\longrightarrow\infty$，即得$u(x_0, t_0)=0$，由$(x_0, t_0)$的任意性，即得所需结论．当$(1+2\alpha)<0$，由（4.31）类似可得．

从而，我们证明了

对任何$\alpha$，（4.2），$(4.28)_1$，$(4.28)_2$的有界解是唯一的．特别$\alpha<\frac{1}{2}$，显然也真．

**5.奇性初—边值问题**

考虑：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\dfrac{2\alpha}{x}u_x,\ (x, t)\in Q_+,\ \alpha>\dfrac{1}{2}, & (4.2)\\ u(x, 0)=\varphi(x),\ 0<x<\infty, & (4.32)_1\\ \lim\limits_{x\to 0}x^{2\alpha-1}u(x, t)=\psi(t),\ 0<t<\infty. & (4.32)_2 \end{cases}$$

**定理9**　设$\varphi$，$\psi$都在定义域$(0, +\infty)$内连续有界，则当$\alpha>\frac{1}{2}$时，问题（4.2）、（4.32）有解$u(x, t)\in C^\infty(Q_+)$且

$$u(x, t)=\int_0^{+\infty}\Gamma_1(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi+\frac{2^{1-2\alpha}}{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\times\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\alpha+1/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\psi(\tau)d\tau. \quad (4.33)$$

当$x$充分大时，$u$保持有界. 又，如果$u$还满足当$x$充分大时$\frac{\partial u}{\partial x}$保持有界，则$u$是唯一的.

**证明** 存在性：由定理7，当$\varphi(\xi)$在$(0,+\infty)$内连续有界时，(4.33)右边第一式满足(4.2)、$(4.32)_1$和$\psi=0$时的$(4\cdot32)_2$；而利用变换$\frac{x^2}{4(t-\tau)}=y$，可得(4·33)右边第二式满足(4·2)，$(4\cdot32)_2$及$\varphi=0$时的$(4\cdot32)_1$，定理的前半部分的其余部分类似于定理8中相应的部分可得出。剩下只须证明唯一性，在基本积分公式(4·22)中，取$AE$为$x=\varepsilon$，$BF$为$x=R$，则有

$$u(x,t)=\int_\varepsilon^R\Gamma_1(x,t;\xi,0)d\xi$$

$$-\int_0^t\left(\Gamma_1\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}+\frac{2\alpha u\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=\varepsilon}d\tau$$

$$+\int_0^t\left(\Gamma_1\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}+\frac{2\alpha u\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=R}d\tau. \qquad (4\cdot34)$$

由于$\varphi=0$，$\psi=0$，且$\Gamma_1$含有因子$\xi^{2\alpha}$，而$\lim\limits_{x\to0}x^{2\alpha-1}u(x,t)=0$. 推得$\lim\limits_{x\to0}x^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}=0$，因此

$$\int_0^t\left(\Gamma_1\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=\varepsilon}d\tau\to0\ (当\ \varepsilon\to0).$$

又因为$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}$含有因子$\xi^{2\alpha+1}$，由$\lim\limits_{x\to0}x^{2\alpha-1}u=0$知，积分$\int_0^t\left(u\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha u\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=\varepsilon}d\tau\to0\ (\varepsilon\to0)$因此，当$\varepsilon\to0$时，(4·34)

右边第二式趋于0；另外，由于$u$和$\frac{\partial u}{\partial x}$当$x$充分大时都保持有界，利用定理7的证明方法可得，当$R\to\infty$时，(4·34)右边第三个积分也趋于0，因此$u=0$.

**推论** 设$\varphi$和$\psi$在$(0,+\infty)$内连续有界，则当$\alpha\geqslant 0$时，下列问题

$$u_t=u_{xx}+\frac{2\alpha}{x}u_x,\quad (x,t)\in Q_+,\quad \alpha\geqslant 0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}x^{2\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}=\psi(t),\quad 0<t<\infty,$$

有唯一解$u\in C^\infty(Q_+)$.

**6.混合问题**

1）考虑奇性混合问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\dfrac{2\alpha}{x}u_x,\quad 0<x<l,\quad 0<t<T\quad \alpha>\dfrac{1}{2}, & (4.2)\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<l, & (4\cdot 35)\\ \lim\limits_{x\to 0}x^{2\alpha-1}u(x,t)=\psi_1(t),\quad 0<t<T, \\ u(l,t)=\psi_2(t),\quad 0<t<T. \end{cases}$$

由定理3和定理9知，函数

$$u_1(x,t)=\int_0^l\Gamma_1(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+\frac{2^{2-2\alpha}}{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\times\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \psi_1(\tau)d\tau$$

满足（4.2）和（4.35）的前两式，再考虑函数

$$u_2(x,\ t)=\int_0^t\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=l} u(\tau)d\tau,$$

其中 $u(\tau)$ 是待定的连续函数. 显然，$u(x,\ 0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\alpha-1}u_2=0$. 因此，问题归结为定出 $u$，使当 $(x,\ t)$ 由 $x=l$ 左方趋于 $x=l$ 上一点 $(l,\ t_0)$ 时，$u(x,\ t)=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t)\to\psi_2(t_0)$. 据定理4.6的间断公式（4·25），有

$$\lim_{\substack{x\to l\\ t\to t_0}} u_2=-\frac{1}{2}\mu(t_0)+\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\substack{x=\xi=l\\ t=t_0}}\mu(\tau)d\tau.$$

设 $\lim\limits_{\substack{x\to l\\ t\to t_0}} u_1(x,\ t)=h(t_0)$，则只须求解积分方程

$$\psi_2(t_0)-h(t_0)=-\frac{1}{2}\mu(t_0)$$

$$+\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\substack{x=\xi=l\\ t=t_0}}\mu(\tau)d\tau. \qquad (4.36)$$

（4.36）是第二类Volterra积分方程，它的积分核属于可解类核，故方程可解，至此，我们得到下面的存在性定理：

**定理10** 设 $\varphi(x)$ 在（0，$l$）上连续，$\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$ 在（0，$T$）上连续，设 $\mu(t)$ 是积分方程（4·36）的连续解，则函数

$$u(x, t)=\int_0^l \Gamma_1(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi+\frac{2^{2-2\alpha}}{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \psi_1(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^t\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=l}\mu(\tau)d\tau. \quad (4.37)$$

是问题（4.2），（4.35）的解。

注　当$\alpha<\frac{1}{2}$时，类似于上述方法，不难得如下混合问题：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\dfrac{2\alpha}{x}u_x, \quad 0<x<l, \quad 0<t<T, \quad \alpha<\dfrac{1}{2}, \\ u(x, 0)=\varphi(x), \quad 0<x<l, \\ u(0, t)=\psi_1(t), \quad 0<t<T, \\ u(l, t)=\psi_2(t), \end{cases} \quad (4.38)$$

的解为

$$u(x, t)=\int_0^l \Gamma_2(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi+\frac{x^{1-2\alpha}}{2^{1-2\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}$$

$$\times\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \psi_1(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^t\left(\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_2}{\xi}\right)_{\xi=l}\mu(\tau)d\tau. \quad (4.39)$$

其中$\mu(\tau)$是如下积分方程的解

$$\psi_2(t_0) - h(t_0) = -\frac{1}{2}\mu(t_0) + \int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\xi} - \frac{2\alpha\Gamma_2}{\xi}\right)_{\substack{\xi = x = l \\ t = t_0}} \times \mu(\tau)d\tau,$$

而 $$h(t_0) = \lim_{(x,t)\to(l,t_0)}\left[\int_0^l \Gamma_2(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi + \frac{x^{1-2\alpha}}{2^{1-2\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\psi_1(\tau)d\tau\right].$$

由极值原理知，上述问题的解是唯一的。

2)最后考虑一般的混合问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \dfrac{2\alpha}{x}u_x, \ (x, t)\in D, & (4.2) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \ a = X_1(0) < x < X_2(0) = b, & \\ u(X_1(t), t) = \psi_1(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, & (4.40) \\ u(X_2(t), t) = \psi_2(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T. & \end{cases}$$

其中区域$D$由$t=0$和$t=T$以及完全落在$Q_+$中的两条曲线$x=X_1(t)$和$x=X_2(t)$所围成，$x=X_1(t)$和$x=X_2(t)$都在$[0, T]$上有连续的一阶微商，且区域$D$中的每条特征线只能交$x=X_1(t)$和$x=X_2(t)$于各一点。

当$\alpha \geqslant \frac{1}{2}$时，设函数

$$u_1(x, t) = \int_a^b \Gamma_1(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi,$$

$$u_2(x, t) = \int_0^t \left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi} - \frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi = X_1(\tau)} \mu_1(\tau)d\tau,$$

$$u_3(x,\ t)=\int_0^t\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi=X_2(t)}\mu_2(\tau)d\tau,$$

其中$\mu_1$和$\mu_2$是待定连续函数．显然$u_2(x,\ 0)=u(x,0)=0$，因此，问题在于定出$\mu_1$和$\mu_2$，使$u=u_1+u_2+u_3$满足（4.40）的后两式．

据间断公式（4.25），我们得到积分方程组

$$\psi_1(t_0)-u_1(X_1(t_0),\ t_0)$$

$$=\frac{1}{2}\mu_1(t_0)+\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\substack{x=X_1(t_0)\\ t=t_0\\ \xi=X_1(\tau)}}\mu_1(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\substack{x=X_1(t_0)\\ t=t_0\\ \xi=X_1(\tau)}}\cdot\mu_2(\tau)d\tau, \tag{4.41}$$

$$\psi_2(t_0)-u_1(X_2(t_0),\ t_0)$$

$$=-\frac{1}{2}\mu_2(t_0)+\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\substack{x=X_2(t_0)\\ t=t_0\\ \xi=X_2(\tau)}}\cdot\mu_1(\tau)d\tau$$

$$+\int_0^{t}\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi}-\frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\substack{x=X_2(t_0)\\ t=t_0\\ \xi=X_2(\tau)}}\mu_2(\tau)d\tau. \tag{4.42}$$

（4.41）和（4.42）是一组联立的Volterra 第二类积分方程组，它是可解的．

当$\alpha<\frac{1}{2}$时，以$\Gamma_2$代替$\Gamma_1$，可作类似讨论．从而有

**定理11** 设$\varphi$在$[a, b]$上连续，$\psi_1$和$\psi_2$在$(0, T)$上连续，又设$\mu_1$和$\mu_2$是积分方程（4.41）、（4.42）的解，则当$\alpha \geqslant \frac{1}{2}$时，混合问题（4.2），（4.40）存在唯一解$u$，由下式给出：

$$u(x, t) = \int_0^\infty \Gamma_1(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t \left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi} - \frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi = X_1(\tau)} \mu_1(\tau)d\tau + \int_0^t \left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\xi} - \frac{2\alpha\Gamma_1}{\xi}\right)_{\xi = X_2(\tau)} \mu_2(\tau)d\tau; \tag{4.43}$$

当$\alpha < \frac{1}{2}$时，以$\Gamma_2$代替$\Gamma_1$即可。

**证明** 只须证明唯一性，设$u$是齐次问题（4.2）、（4.40）的解，在Green公式

$$\iint_D \left[vL(u) - uL^*[v]\right]dx\,dt = -\int_C (uv)dx + \left(vu_x - v_x u + \frac{2\alpha uv}{x}\right)dt$$

中，取$v = x^{2\alpha}$，$u = u^2$，得到

$$2\iint_D x^{2\alpha}(u_x)^2 dx\,dt = \int_c x^{2\alpha}u^2dx + 2x^{2\alpha}uu_x dt.$$

其中$D'$是由$x = X_1(t)$，$x = X_2(t)$，$t = 0$及$Q_+$中过任一点$M$的特征所围成区域，$c$是其边界。由混合问题的条件，得到

$$2\iint_{D'} x^{2\alpha}(u_x)^2 dx\,dt + \int_{\overline{PQ}} x^{2\alpha}u^2dx = 0.$$

其中$\overline{PQ}$为过$M$点特征与$X_1(t)$，$X_2(t)$相交所成之线段，且$Q$在$P$点右方。

从而$x^{2\alpha}u^2=0$，又$x\neq 0$，于是在$\overline{PQ}$上，$u\equiv 0$。由$M$的任意性，即得在$D$内，恒有$u=0$。

## §2. 多条奇线的方程

**1.**殷慰萍[121]推广华罗庚提出的混合型方程[120]，而考虑了如下的方程

$$u_{xy}-(n-2)[\mathrm{ctg}(x+y)+\mathrm{ctg}2(x-y)]u_x$$

$$-(u-2)[\mathrm{ctg}(x+y)-\mathrm{ctg}2(x-y)]u_y=0. \qquad (4.44)$$

其中$n$为正整数。

先看（4.44）的一种特殊情形

$$u_{xy}-\beta\,\mathrm{ctg}(x\pm y)u_x+\beta\,\mathrm{ctg}(x\pm y)u_y=0. \qquad (4.45)$$

（4.45）不是EPD方程。但是如果作未知函数变换$u(x,y)=\sin\beta(x\pm y)V(x,y)$

则$V$满足方程

$$V_{xy}-\frac{\beta(\beta-1)}{sin^2(x\pm y)}V=0. \qquad (4.46)$$

而$\sin^2(x\pm y)=(\mathrm{tg}x\mp\mathrm{tg}y)^2\cos^2x\cos^2y$，

因此（4.46）具有如下形式

$$V_{xy}-\frac{\beta(\beta-1)\varphi'(x)\varphi'(y)}{[\varphi(x)-\varphi(y)]}V=0.$$

这正是$\beta=\beta'$的EPD方程的另一种形式（见附注）。

再回到方程（4.44）上。作未知函数变换

$$u(x, y)=\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin^2 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} V(x, y).$$

则

$$u_x=\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin^2 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} V_x+(n-2)\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x+y)}\right)^{\frac{n}{2}-2}$$

$$\times\left(\frac{\sin(x+y)\cos(x+y)}{\sin 2(x-y)}-\frac{\sin^2(x+y)\cos(x+y)}{\sin^2 2(x-y)}\right)$$

$$=\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} V_x+(n-2)\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x+y)}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\times V[\operatorname{ctg}(x+y)-\operatorname{ctg}2(x-y)],$$

$$u_y=\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} V_y+(n-2)\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\times V[\operatorname{ctg}(x+y)+\operatorname{ctg}2(x-y)],$$

$$u_{xy}=\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} V_{xy}+(n-2)\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\times V_x[\operatorname{ctg}(x+y)+\operatorname{ctg}2(x-y)]$$

$$+(n-2)\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} V_y[\operatorname{ctg}(x+y)-\operatorname{ctg}2(x-y)]$$

$$-(n-2)\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1} V\left(\frac{1}{\sin^2(x+y)}\right.$$

$$+\frac{2}{\sin^2 2(x-y)}\Bigg)+(n-2)^2\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\times V[\operatorname{ctg}(x+y)-\operatorname{ctg}^2 2(x-y)].$$

代入方程（4.44），注意

$$\begin{aligned}&\operatorname{ctg}^2(x+y)-\operatorname{ctg}^2 2(x-y)\\&\quad=1+\operatorname{ctg}^2(x+y)-1-\operatorname{ctg}^2 2(x-y)\\&\quad=\frac{1}{\sin^2(x+y)}-\frac{1}{\sin^2 2(x-y)},\end{aligned}$$

则得

$$\left(\frac{\sin^2(x+y)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left\{V_{xy}+\left(\frac{(n-2)(n-1)}{\sin^2(x+y)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right)V\right\}=0.$$

即$V$满足方程

$$V_{xy}+\left(\frac{(n-2)(n-1)}{\sin^2(x+y)}-\frac{(n-2)(n-4)}{\sin^2 2(x-y)}\right)V=0. \qquad (4.47)$$

因此方程（4.44）和(4.46)的关系〔从而也是和方程(4.45)的关系〕，和 Darboux 在名著《曲面论》[3] 中所讨论的“调和方程”

$$V_{\xi\eta}-\left(\frac{\mu(\mu-1)}{(\xi+\eta)^2}-\frac{\mu'(\mu'-1)}{(\xi-\eta)^2}+\frac{\nu(\gamma-1)}{(1-\xi\eta)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma'(\gamma'-1)}{(1-\xi\eta)^2}\right)V=0$$

与EPD方程关系类似。

现在我们就转向比（4.47）更一般的方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{\sin^2(x+y)}+\frac{\beta(1-\beta)}{\cos^2(x+y)}-\frac{r(1-r)}{\sin^2(x-y)}\right.$$

$$\left.-\frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2(x-y)}\right]V=0 \tag{4.48}$$

的讨论上，其中$\alpha$，$\beta$，$r$，$\nu$是实数。

我们可利用Copson求Riemann函数的技巧和方法[42, 43]，求出(4.44)的$R$—函数，然后讨论其奇性Cauchy问题。

首先，由三角函数的周期性，可以取$\Omega$：$0\leqslant x-y\leqslant\frac{\pi}{2}$；$0\leqslant x+y\leqslant\frac{\pi}{2}$为研究方程(4.44)的基本定义域。此时$x\pm y=0$和$x\pm y=\frac{\pi}{2}$是方程的四条奇线。

令

$$\sigma_1=\frac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\sin(x+y)\sin(x_0+y_0)},\quad \sigma_2=\frac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\cos(x+y)\cos(x_0+y_0)},$$

$$\sigma_3=\frac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\sin(x-y)\sin(x_0-y_0)},\quad \sigma_4=\frac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\cos(x-y)\cos(x_0-y_0)}.$$

代入方程，并注意到，由

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\right)=-\frac{1}{\sigma_1^2}\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}+\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x\partial y}$$

有

$$\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x\partial y}=\frac{1+2\sigma_1}{\sin^2(x+y)},\quad \frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x\partial y}=\frac{1+2\sigma_1}{\cos^2(x+y)},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_3}{\partial x \partial y} = \frac{1-2\sigma_3}{\sin^2(x-y)}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_4}{\partial x \partial y} = \frac{1-2\sigma_4}{\cos^2(x-y)}.$$

得到

$$\frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{\sin^2(x+y)}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1^2} + \frac{\sigma_2(1+\sigma_2)}{\cos^2(x+y)}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2^2} + \frac{\sigma_3(1-\sigma_3)}{\sin^2(x-y)}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_3^2}$$

$$+ \frac{\sigma_4(1-\sigma_4)}{\cos^2(x-y)}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_4^2} + \left(\frac{\sigma_1}{\cos^2(x+y)} + \frac{\sigma_2}{\sin^2(x+y)}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} + \left(\frac{\sigma_3}{\sin^2(x+y)} + \frac{\sigma_1}{\sin^2(x-y)}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3}$$

$$+ \left(\frac{\sigma_4}{\sin(x+y)} + \frac{\sigma_1}{\cos^2(x-y)}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_4} + \left(\frac{\sigma_2}{\sin^2(x-y)}\right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_3}{\cos^2(x+y)}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_3} + \left(\frac{\sigma_4}{\cos^2(x+y)} + \frac{\sigma_2}{\cos^2(x-y)}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_4}$$

$$+ \left(\frac{\sigma_3}{\cos^2(x-y)} + \frac{\sigma_4}{\sin^2(x-y)}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_3 \partial \sigma_4}$$

$$+ \frac{1+2\sigma_1}{\sin^2(x+y)}\frac{\partial V}{\partial \sigma_1} + \frac{1+2\sigma_2}{\cos^2(x+y)}\frac{\partial V}{\partial \sigma_1} + \frac{1-2\sigma_3}{\sin^2(x-y)}\frac{\partial V}{\partial \sigma_3}$$

$$+ \frac{1-2\sigma_4}{\cos^2(x-y)}\frac{\partial V}{\partial \sigma_4} + \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{\sin^2(x+y)} + \frac{\beta(1-\beta)}{\cos^2(x+y)}\right.$$

$$\left. - \frac{\gamma(1-\gamma)}{\sin^2(x-y)} - \frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2(x-y)}\right) V = 0. \tag{4.49}$$

如果$V$同时满足下列方程组，则必满足（4.49）

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sigma_1(1+\sigma_1)\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_1^2}+\sigma_2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_1\partial\sigma_2}+\sigma_3\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_1\partial\sigma_3}\\
&\quad+\sigma_4\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_1\partial\sigma_4}+(1+2\sigma_1)\frac{\partial V}{\partial\sigma_1}+\alpha(1-\alpha)V=0\\
&\sigma_2(1+\sigma_2)\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_2^2}+\sigma_1\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_1\partial\sigma_2}+\sigma_3\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_2\partial\sigma_3}\\
&\quad+\sigma_4\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_2\partial\sigma_4}+(1+2\sigma_2)\frac{\partial V}{\partial\sigma_2}+\beta(1-\beta)V=0\\
&\sigma_3(1-\sigma_3)\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_3^2}+\sigma_1\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_1\partial\sigma_3}+\sigma_2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_2\partial\sigma_3}\\
&\quad+\sigma_4\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_3\partial\sigma_4}+(1-2\sigma_3)\frac{\partial V}{\partial\sigma_3}-\gamma(1-\gamma)V=0\\
&\sigma_4(1-\sigma_4)\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_4^2}+\sigma_1\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_1\partial\sigma_4}+\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_2\partial\sigma_4}\\
&\quad+\sigma_3\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma_3\partial\sigma_4}+(1-2\sigma_4)\frac{\partial V}{\partial\sigma_4}-\nu(1-\nu)V=0.
\end{aligned}
\right.
\tag{4.50}
$$

若再令

$$\sigma_1^1=-\sigma_1,\quad \sigma_2^1=-\sigma_2,$$

则（4.50）变为

$$
\begin{cases}
\sigma_1^1(1-\sigma_1^1)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1^{12}}+\sigma_2^1\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1^1 \partial \sigma_2^1}+\sigma_3\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1^1 \partial \sigma_3} \\
\quad +\sigma_4\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1^1 \partial \sigma_4}+(1-2\sigma_1^1)\dfrac{\partial V}{\partial \sigma_1^1}-\alpha(1-\alpha)V=0, \\
\sigma_2^1(1-\sigma_2^1)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2^{12}}+\sigma_1^1\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1^1 \partial \sigma_2^1}+\sigma_3\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_1^1 \partial \sigma_3} \\
\quad +\sigma_4\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2^1 \partial \sigma_4}+(1-2\sigma_2^1)\dfrac{\partial V}{\partial \sigma_2^1}-\beta(1-\beta)V=0, \\
\sigma_3(1-\sigma_3)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_3^2}+\sigma_1^1\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2^1 \partial \sigma_3}+\sigma_2^1\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2^1 \partial \sigma_4} \\
\quad +\sigma_4\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_3 \partial \sigma_4}+(1-2\sigma_3)\dfrac{\partial V}{\partial \sigma_3}-\gamma(1-\gamma)V=0, \\
\sigma_4(1-\sigma_4)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_4^2}+\sigma_1^1\dfrac{\partial V}{\partial \sigma_1^1 \partial \sigma_4}+\sigma_2^1\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_2^1 \partial \sigma_4} \\
\quad +\sigma_3\dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma_3 \partial \sigma_4}+(1-2\sigma_4)\dfrac{\partial V}{\partial \sigma_4}-\nu(1-\nu)V=0.
\end{cases}
\tag{4.51}
$$

（4.51）是四个变元的超几何方程的一种，直接用幂级数法（利用Chaundg[44]的技巧），可求得（4.51）的满足

$$
V(\sigma_1^1,\ \sigma_2^1,\ \sigma_3,\ \sigma_4)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=1
$$

的解为

$$
V(\sigma_1^1,\ \sigma_2^1,\ \sigma_3,\ \sigma_4)
$$

$$=\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=0}^{\infty}[(\alpha)_{l_1}(1-\alpha)_{l_1}(\beta)_{l_2}(1-\beta)_{l_2}(\gamma)_{l_3}(1-\gamma)_{l_3}$$

$$\times(\nu)_{l_4}(1-\nu)_{l_4}/(l_1+l_2+l_3+l_4)_{l_1}!\,l_2!\,l_3!\,l_4!]$$

$$\times\sigma_1^{1l_1}\sigma_2^{1l_2}\sigma_3^{l_3}\sigma_4^{l_4} \tag{4.52}$$

易见（4.52）当$|\sigma_1^1|<1$，$|\sigma_2^1|<1$，$|\sigma_3|<1$，$|\sigma_4|<1$时(例如对$\Omega$中$x_0+y_0\leqslant\frac{\pi}{4}$，$|y|<|y_0|<x<x_0$的点）绝对一致收敛。我们将它记为

$$F(\alpha,\ 1-\alpha,\ \beta,\ 1-\beta,\ \gamma,\ 1-\gamma,\ \nu,\ 1-\nu;$$
$$\sigma_1^1,\ \sigma_2^1,\ \sigma_3,\ \sigma_4).$$

由于（4.48）自共轭，而（4.52）关于$(x_0,\ y_0)$和$(x,\ y)$是对称的，所以在收敛区域中，（4.52）就是（4.48）的Riemann函数。

2.令$V(x,\ y)=\lambda(x,\ y)u(x,\ y)$，其中

$$\lambda(x,\ y)=\sin^\alpha(x+y)\cos^\beta(x+y)\sin^\gamma(x-y)\cos^\nu(x-y).$$

则当$\gamma$满足（4.48）时，$u$满足如下方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+[\alpha\mathrm{ctg}(x+y)-\beta\mathrm{tg}(x+y)+\gamma\mathrm{ctg}(x-y)$$

$$-\nu\mathrm{tg}(x-y)]\frac{\partial u}{\partial x}+[\alpha\mathrm{ctg}(x+y)-\beta\mathrm{tg}(x+y)$$

$$-\gamma\mathrm{ctg}(x-y)+\nu\mathrm{tg}(x-y)]\frac{\partial u}{\partial y}+[(\gamma+\nu)^2$$

$$-(\alpha+\beta)^2]u=0.$$

特别，当$\beta=0$，$\gamma=-\nu$，$\alpha=-2\gamma$时，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha[\operatorname{ctg}(x+y) + \operatorname{ctg}2(x-y)]\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+ \alpha[\operatorname{ctg}(x+y) - \operatorname{ctg}2(x-y)]\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

如果 $n = 2 - n$，这就是殷慰萍[121]讨论过的方程。

在上述未知函数变换下，Riemann函数的变换关系为

$$R(x, y; x_0, y_0) = \frac{\lambda(x_0, y_0)}{\lambda(x, y)}\overline{R}(x, y; x_0, y_0).$$

其中$\overline{R}$是原方程的Riemann函数，$R$是新方程的 Riemann 函数. 故（4.53）的$R$函数为

$$R(x, y; x_0, y_0)$$

$$= \left(\frac{\sin(x+y)}{\sin(x_0+y_0)}\right)^{\alpha}\left(\frac{\sin^2(x_0-y_0)}{\sin^2(x-y)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times F\left(\alpha, 1-\alpha, -\frac{\alpha}{2}, 1+\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, 1+\frac{\alpha}{2}, \sigma_1{}^1, \sigma_3, \sigma_4\right).$$

当$|\sigma_1{}^1| < 1$，$|\sigma_3| < 1$，$|\sigma_4| < 1$时，利用三个变元的超几何函数公式，有

$$F(\alpha, 1-\alpha, \gamma, 1-\gamma, \nu, 1-\nu; \sigma_1{}^1, \sigma_3, \sigma_4)$$

$$= F_3(\gamma, 1-\gamma, \nu, 1-\nu, 1, \sigma_3, \sigma_4)$$

$$-\int_0^1 F_3(\gamma, 1-\gamma, \nu, 1-\nu, 1, \sigma_3 t_1, \sigma_4 t)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial t}F(\alpha, 1-\alpha, 1, \sigma_1{}^1(1-t))dt,$$

其中$F_3$是两个变元的超几何级数、注意到

$$F_3(\gamma,\ 1-\gamma,\ \nu,\ 1-\nu,\ 1,\ \sigma_3,\ \sigma_4)$$
$$=(1-\sigma_3)^{\gamma-\nu}F(\gamma,\ 1-\nu,\ 1,\ \sigma_3+\sigma_4-\sigma_3\sigma_4)$$

而

$$\sigma_3+\sigma_4-\sigma_3\sigma_4=\frac{\sin 2(x-x_0)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x-y)\sin 2(x_0-y_0)},$$

从而有

$$R(x,\ y;x_0,\ y_0)$$
$$=\left(\frac{\sin(x+y)}{\sin(x_0+y_0)}\right)^{\alpha}\left(\frac{\sin 2(x_0-y_0)}{\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left\{F\left(-\frac{\alpha}{2},\ 1+\frac{\alpha}{2},\ 1;\ \frac{\sin 2(x-x_0)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x-y)\sin 2(x_0-y_0)}\right)-\int_0^1 F\left(-\frac{\alpha}{2},\ 1+\frac{\alpha}{2},\ 1,\ (\sigma_3+\sigma_4-\sigma_3\sigma_4 t)\,t\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial t}F(\alpha,\ 1-\alpha,1,\ \sigma_1^1(1-t))dt\right\}$$
$$=R_1(x,\ y;x_0,\ y_0)-R_2(x,\ y;x_0,\ y_0). \tag{4.55}$$

**3.** 我们现在可以利用（4.55）来解奇性Cauchy问题：

$$\begin{cases}(4.53)\ ,\\ u(x,\ y)|_{x=y}=f(2y),\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x=0}=0.\end{cases} \tag{4.56}$$

如同第二章，如果我们限定求正则解，即若假定

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=y}=0(1),$$

则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=y}=0\,,$$

可作为结论导出。

我们先对支柱 $x-y=\varepsilon$ 解Cauchy问题（4.56），然后让 $\varepsilon\to 0$。根据熟知的Riemann法，解的表达式为

$$u(x_0,y_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2}(uR)_{\substack{x=x_0\\ y=x_0-\varepsilon}}+\frac{1}{2}(uR)_{\substack{x=y_0+\varepsilon\\ y=y_0}}\right.$$

$$-\int_{y_0}^{x_0-\varepsilon}\left[\left(2\alpha\operatorname{ctg}2(x-y)R+\frac{1}{2}R_x-\frac{1}{2}R_y\right)u\right.$$

$$\left.\left.-R(u_x-u_y)\right]_{x-y=\varepsilon}dy\right\}\,. \tag{4.57}$$

为计算上式右端，需要讨论Riemann函数在 $x=y$ 附近的性质。首先注意，（4.55）是定义在Ω的子域 $y<y_0<x<x_0$ 中，所以利用公式

$$\times F(a,\ b,\ c,\ z)$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}$$

$$\times F(a,\ 1-c+a,\ 1-b+a,\ z^{-1})+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}$$

$$\times F(b,\ 1-c+b,\ 1-a+b,\ z^{-1}).$$

将（4.55）中的超几何函数进行延拓，保证当 $x$ 和 $y$ 很接近时 $R$ 有意义，然后考察其极限情形。将上面公式应用于（4.55），在 $x=y$ 附近，有

$$R_1(x, y; x_0, y_0)$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\left\{\frac{\sin^2(x+y)\sin 2(x_0-x)\sin 2(y-y_0)}{\sin^2(x_0+y_0)\sin 2(x-y)}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$-\frac{\Gamma(-1-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\left\{\frac{\sin(x+y)}{\sin(x_0+y_0)}\right\}^{\alpha}[\sin 2(x_0-x)$$

$$\times \sin 2(y-y_0)]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\sin^{1+\alpha}2(x_0-y_0)\sin 2(x-y)$$

$$+0(\sin(x-y)),$$

而$\alpha<0$，故有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R_1(x, y; x_0, y_0)|_{x-y=\varepsilon}=0. \tag{4.58}$$

记

$$R_{11}(x, y; x_0, y_0)$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\left\{\frac{\sin^2(x+y)\sin 2(x_0-x)\sin 2(y-y_0)}{\sin^2(x_0+y_0)\sin^2 2(x-y)}\right\}^{\alpha}$$

$$\times F\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, -\alpha, \frac{\sin 2(x-y)\sin 2(x_0-y_0)}{\sin 2(x-x_0)\sin 2(y-y_0)}\right).$$

$$R_{12}(x, y; x_0, y_0)$$

$$=\frac{\Gamma(-1-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\left\{\frac{\sin(x+y)}{\sin(x_0+y_0)}\right\}^{\alpha}[\sin 2(x_0-x)$$

$$\sin 2(y-y_0)]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\sin^{1-\alpha}2(x_0-y_0)\sin 2(x-y)$$

$$\times F\left(1+\frac{\alpha}{2},\ 1+\frac{\alpha}{2},\ 2+\alpha;\ \frac{\sin 2(x-y)\sin 2(x_0-y_0)}{\sin 2(x-x_0)\sin 2(y-y_0)}\right).$$

则

$$R_1(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=R_{11}(x,y;x_0,\ y_0)+R_{12}(x,\ y;x_0,y_0).$$

经过计算，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\alpha\text{ctg}2\,(x-y)R_1+\frac{1}{2}R_{1x}-\frac{1}{2}R_{1y}\right]_{x-y=\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{2(1+\alpha)\text{ctg}2(x-y)R_{12}+0\left\{\left[\sin 2(x-y)\right]^{-\alpha}\right\}\right.$$

$$\left.+\ 0\left[\sin 2(x-y)\right]\right\}_{x-y=\varepsilon}$$

$$=-2\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{\sin 2y}{\sin(x_0+y_0)}\right)^{\alpha}$$

$$\times[\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\sin^{1+\alpha}2(x_0-y_0).\tag{4.59}$$

因为

$$t\ (\sigma_3+\sigma_4-\sigma_3\sigma_4 t)=\frac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\sin 2(x-y)\sin 2(x_0-y_0)}\sigma,$$

其中

$$\sigma=4t[\cos(x-y-x_0+y_0)-t\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)].$$

所以$R_2(x,\ y;x_0,\ y_0)$在$x=y$附近性态基本与$R_1$类似．事实上，利用超几何函数拓展公式于

$R_2(x, y; x_0, y_0)$中的$F\left(-\frac{\alpha}{2}, 1+\frac{\alpha}{2}, 1; (\sigma_3+\sigma_4-\sigma_3\sigma_4 t)t\right)$，再乘以$\left(\frac{\sin^2(x+y)\sin 2(x_0-y_0)}{\sin^2(x_0+y_0)\sin 2(x-y)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$，

且分别记为$\overline{R_2}=\overline{R}_{21}+\overline{R}_{12}$，则在$x=y$附近，$R_2$性质由$\overline{R_2}$确定。而

$$\overline{R_{2x}}=-2\alpha\operatorname{ctg}2(x-y)\,\overline{R_{21}}+0\left\{[\sin 2(x-y)]^{-\alpha}\right\}$$

$$+2\operatorname{ctg}2(x-y)\overline{R}_{22}+0[\sin 2(x-y)],$$

$$\overline{R_{2y}}=2\alpha\operatorname{ctg}2(x-y)\overline{R}_{21}+0\left\{[\sin 2(x-y)]^{-\alpha}\right\}$$

$$-2\operatorname{ctg}2(x-y)\overline{R}_{22}+0[\sin 2(x-y)]$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R_2(x, y; x_0, y_0)|_{x-y=\varepsilon}=0.$$

且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\alpha\operatorname{ctg}2(x-y)R_2+\frac{1}{2}R_{2x}-\frac{1}{2}R_{2y}\right]_{x-y=\varepsilon}$$

$$=2\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{\sin 2y}{\sin(x_0+y_0)}\right)^{\alpha}\sin^{1+\alpha}2(x_0-y_0)$$

$$\times[\sin(x_0-y)\sin(y-y_0)]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\times\int_0^1\left\{4t[\cos(x-y_0)\right.$$

$$\left.+t\sin(x_0-y)\sin(y-y_0)]\right\}^{-1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial t}F\left(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1;(1-t)\ \frac{\sin(x_0-y)\sin(y-y_0)}{\sin 2y\sin(x_0+y_0)}\right)dt.$$

(4.61)

令

$$t=-\frac{\sin\frac{x_0-y_0+\eta}{2}\sin\frac{x_0-y_0-\eta}{2}}{\sin(y-x_0)\sin(y-y_0)}.$$

则

$$(1-t)\frac{\sin(x_0-y)\sin(y-y_0)}{\sin 2y\sin(x_0+y_0)}$$

$$=4t\left[\cos(x_0-y_0)+\sin\frac{x_0-y_0+\eta}{2}\sin\frac{x_0-y_0-\eta}{2}\right].$$

此外，$t=0$ 时 $\eta=-x_0+y_0$（如 $x_0<y_0$，则应取 $\eta=x_0-y_0$）；$t=1$ 时，$\eta=2y-x_0-y_0$，这样（4.61）变为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\alpha\operatorname{ctg}2(x-y)\ R_2+\frac{1}{2}R_{2x}-\frac{1}{2}R_{2y}\right]_{x-y=\varepsilon}$$

$$=\frac{2\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{\sin 2y}{\sin(x_0+y_0)}\right)^{\alpha}\sin^{1+\alpha}2(x_0-y_0)$$

$$\times\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}[\sin(x_0-y_0+\eta)\sin(x_0-y_0-\eta)]^{-1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\eta}F\Big(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,$$

$$\left.\frac{\sin\frac{2y+\eta-x_0-y_0}{2}\sin\frac{2y-\eta-x_0-y_0}{2}}{-\sin 2y\sin(x_0+y_0)}\right)d\eta. \qquad (4.61)'$$

将（4.58）—（4.61）′代入（4.57），且注意到，只要$u_x-u_y$有界，则$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}R(u_x-u_y)|_{x-y=\varepsilon}=0$，最后得到（4.56）的解为

$$\begin{aligned}
&u(x_0,\ y_0)\\
&=\frac{2\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\sin^{1+\alpha}2(x_0-y_0)}{\sin^{\alpha}(x_0+y_0)}\int_{y_0}^{x_0}f(2y)\sin^{\alpha}2y\\
&\quad\times\left\{[\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right.\\
&\quad+\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}[\sin(x_0-y_0+\eta)\sin(x_0-y_0-\eta)]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\\
&\quad\times\frac{\partial}{\partial\eta}F\left(\alpha,1-\alpha,1,\frac{\sin\frac{2y+\eta-x_0-y_0}{2}\sin\frac{2y-\eta-x_0-y_0}{2}}{-\sin 2y\sin(x_0+y_0)}\right)\\
&\quad\left.d\eta\right\}dy. \qquad (4.62)
\end{aligned}$$

当上式$\alpha$取负整数时，和[121]的结果显然一致。

**4.我们验证（4.62）是（4.56）的解**

**引理12**

$$W=\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\lambda\frac{\partial F(\alpha,1-\alpha,1;\tau)}{\partial\eta}d\eta.$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_0 \partial y_0}=\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2(x_0+y_0)}-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2(x_0-y_0)}\right)W$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2(x_0+y_0)}\left(\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y)}\right)^{-1-\frac{\alpha}{2}} \tag{4.63}$$

其中

$$\lambda=\left(\frac{\sin(x_0-y_0+\eta)\sin(x_0-y_0-\eta)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right)^{-1-\frac{\alpha}{2}}, \tag{4.64}$$

$$\tau=\frac{\sin\frac{2y+\eta-x_0-y_0}{2}\sin\frac{2y-\eta-x_0-y_0}{2}}{-\sin 2y\sin(x_0-y_0)}. \tag{4.65}$$

**证明** 作变换 $\xi=x_0+y_0$，$\theta=x_0-y_0$。则 (4.63) 变为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}=\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2\theta}\right)W+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}$$

$$\times\left(\frac{\sin(\xi+\theta-2y)\sin(2y-\xi+\theta)}{\sin 2\theta}\right)^{-1-\frac{\alpha}{2}}.$$

而

$$\lambda=\left(\frac{\sin(\theta+\eta)\sin(\theta-\eta)}{\sin 2\theta}\right)^{-1-\frac{\alpha}{2}};$$

$$\tau=\frac{\sin\frac{2y+\eta-\xi}{2}\sin\frac{2y-\eta-\xi}{2}}{-\sin 2y\sin\xi};$$

$$W=\int_{-2\nu-\xi}^{-\theta}\lambda\frac{\partial F}{\partial\eta}d\eta.$$

**现在只须验证$W$满足（4.63）′。**

**易证** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}F.$

**所以有**

$$\int_{-2\nu-\xi}^{-\theta}\lambda\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^2\partial\eta}d\eta$$

$$=\int_{2\nu-\xi}^{-\theta}\lambda\frac{\partial^3 F}{\partial\eta^3}d\eta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}\int_{2\nu-\xi}^{-\theta}\frac{\partial F}{\partial\eta}d\eta$$

$$=\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial\eta}-\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)_{2\nu-\xi}^{-\theta}+\int_{2\nu-\xi}^{-\theta}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta^2}\frac{\partial F}{\partial\eta}d\eta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}W.$$

**和**

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}=\int_{2\nu-\xi}^{-\theta}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\theta^2}\frac{\partial F}{\partial\eta}d\eta-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\bigg|_{\eta=-\theta},$$

**因此有**

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}$$

$$=\int_{2\nu-\xi}^{-\theta}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial\theta^2}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}\lambda\right)\frac{\partial F}{\partial\eta}d\eta$$

$$+\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}-\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right)\frac{\partial F}{\partial\eta}\right]\bigg|_{\eta=-\theta}+\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2\nu-\xi}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\lambda\bigg|_{\eta=2\nu-\xi}\right)\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2\nu-\xi}-\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta}\right)\right]\bigg|_{\eta=2\nu-\xi}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2y-\xi}\right)\Big]\lambda\bigg|_{\eta=2y-\xi}. \qquad (4.66)$$

易见

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}-\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right)\bigg|_{\eta=-\theta}=0; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2y-\xi}+\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\left(\lambda\bigg|_{\eta=2y-\xi}\right)=0.$$

另外，因为

$$F'(a,\ b,\ c,\ \tau)=\frac{ab}{c}F(a+1,\ \ b+1,\ \ c+1,\ \ \tau),$$

$$\tau\big|_{\eta=2y-\xi}=0.$$

$$\frac{\partial F(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2y-\xi}$$

$$=\alpha(\alpha-1)F(\alpha+1,\ \ 2-\alpha,\ 2,\ 0)\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2y-\xi}$$

$$=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}(\operatorname{ctg}\xi-\operatorname{ctg}2y),$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2y-\xi}\right)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\ \frac{1}{\sin^2\xi}.$$

再计算

$$\left(\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\right)\bigg|_{\eta=2y-\xi}.$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}=F''\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\right)^2-\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\ \frac{\partial\tau}{\partial\eta}\right]$$

$$+F'\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi\partial\eta}\right).$$

而

$$\frac{\partial\tau}{\partial\eta}=\frac{\sin\eta}{2\sin\xi\ \sin2y},\quad \frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2}=\frac{\cos\eta}{2\sin\xi\ \sin2y}.$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial\xi}=\frac{\sin(2y-\xi)}{2\sin\xi\ \sin2y}-\tau\,\mathrm{ctg}\,\xi,\quad \frac{\partial^2\tau}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{\sin\eta\cos\xi}{2\sin^2\xi\ \sin2y}.$$

所以

$$\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\eta=2y-\xi}=\frac{1}{2\sin^2\xi},$$

从而

$$\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\eta=2y-\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=2y-\xi}\right)\right]\lambda\bigg|_{\eta=2y-\xi}$$

$$=F'\bigg|_{\eta=2y-\xi}\cdot\frac{1}{2\sin^2\xi}\lambda\bigg|_{\eta=2y-\xi}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\sin^2\xi}\left[\frac{\sin(\theta-\xi+2y)\sin(\theta+\xi-2y)}{\sin2\theta}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}.$$

最后易知

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial\theta^2}=-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2\theta}\lambda.$$

总起来（4.66）变为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}$$

$$=\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2\theta}\right]\int_{2y-\xi}^{-\theta}\lambda\frac{\partial F}{\partial\eta}d\eta$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}\left[\frac{\sin(\theta-\xi+2y)\sin(\theta+\xi-2y)}{\sin2\theta}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}.$$

$$=\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2\theta}\right]W+\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2\xi}$$

$$\times\left[\frac{\sin(\theta-\xi+2y)\sin(\theta+\xi-2y)}{\sin 2\theta}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}.$$

这正是 (4.63)′.

现在验证 (4.62) 是 (4.56) 的解. 已知在变换

$$V(x_0,\ y_0)=\frac{\sin^\alpha(x_0+y_0)}{\sin^{\frac{\alpha}{2}}2(x_0-y_0)}u(x_0,\ y_0).$$

下，方程 (4.53) 变为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_0\partial y_0}=\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2(x_0+y_0)}-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2(x_0-y_0)}\right]V. \qquad (4.67)$$

由于是齐次方程，故只须验证

$$V(x_0,\ y_0)$$
$$=\int_{y_0}^{x_0}f(2y)\sin^\alpha 2y\left\{\left[\frac{\sin 2(x_0-y)\sin(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right.$$

$$\left.+\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,1-\alpha,1,\tau)d\eta\right\}dy. \qquad (4.68)$$

满足 (4.67) 和 (4.62) 满足初始条件即可. 其中 $\lambda$、$\tau$ 如前所示.

先设 $\alpha<-2$，我们有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_0\partial y_0}$$
$$=\int_{y_0}^{x_0}f(2y)\sin^2(2y)\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial y_0}$$

$$\times\left\{\left[\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}\right.$$

$$\left.\times F(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)d\eta\right\}dy$$

$$-f(2y_0)\sin^{\alpha}(2y_0)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\times\left\{\left[\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin^2(x_0-y_0)}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right.$$

$$\left.+\int_{2y_0-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)d\eta\right\}\Bigg|_{y=y_0}$$

$$+f(2x_0)\sin^{\alpha}(2x_0)\ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right.$$

$$\left.+\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,1-\alpha,\ 1,\ \tau)d\eta\right\}\Bigg|_{y=x_0}.$$

不难验证上式右端后两项均为零．事实上，当 $\alpha<-2$ 时

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\Bigg|_{y=y_0}=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\Bigg|_{y=x_0}=0.$$

但

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y}\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,\ 1-\alpha,1,\tau)d\eta\Bigg|_{y=y_0}.$$

由于积分线重合而等于零．最后

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)d\eta\Bigg|_{y=x_0}$$

$$=\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,1-\alpha,\ 1,\ \tau)\right]_{\eta=-x_0+y_0}$$

$$+\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)\right]_{\eta=x_0-y_0}$$

$$+\int_{x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\left[\lambda\frac{\partial^2}{\partial y_0\partial\eta}F\ (\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\lambda}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,1-\alpha,1,\ \tau)\right]_{y=x_0}d\eta.$$

显然

$$\lambda|_{\eta=-x_0+y_0}=\lambda|_{\eta=x_0-y_0}=0,$$

再有

$$\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)\Big|_{y=x_0}$$

$$=\alpha(1-\alpha)F(1+\alpha,\ 2-\alpha,\ 2,\ \tau)\frac{d\tau}{d\eta}\Big|_{y=x_0}$$

$$=\alpha(1-\alpha)F\Bigg(1+\alpha,\ 2-\alpha,\ 2,$$

$$\times\frac{\cos 2(x_0-y_0)-\cos\eta}{2\sin 2x_0\sin(x_0+y_0)}\Bigg)\frac{\sin\eta}{2\sin(x_0+y_0)\sin 2x_0}.$$

所以$\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{y=x_0}$和$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0\partial\eta}\Big|_{y=x_0}$都是$\eta$的奇函数．以及

$$\lambda\Big|_{y=x_0}=\left(\frac{\sin(x_0-y_0+\eta)\sin(x_0-y_0-\eta)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right)^{-1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\left(\frac{\cos 2\eta-\cos 2(x-y)}{2\sin 2(x_0-y_0)}\right)^{-1-\frac{\alpha}{2}}.$$

所以 $\lambda\Big|_{y=x_0}$ 和 $\dfrac{\partial\lambda}{\partial y_0}\Big|_{y=x_0}$ 都是η的偶函数．这样，（4.69）右端最后一项积分由于被积函数是η的奇函数而值为零．

现在，根据引理和易于验证的事实：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial y_0}\left\{\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right\}^{-1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$=-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2(x-y)}\left\{\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right\}^{-1-\frac{\alpha}{2}}.$$

最后得到

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_0\partial y_0}=\left\{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2(x_0+y_0)}-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2(x_0-y_0)}\right\}$$

$$\times\int_{y_0}^{x_0} f(2y)\sin^2 2y\left\{\left\{\frac{\sin 2(x_0-y)\sin 2(y-y_0)}{\sin 2(x_0-y_0)}\right\}^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right.$$

$$\left.+\int_{2y-x_0-y_0}^{-x_0+y_0}\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}F(\alpha,\ 1-\alpha,\ 1,\ \tau)d\eta\right\}dy$$

$$=\left\{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\sin^2(x_0+y_0)}-\frac{\alpha(\alpha+2)}{\sin^2 2(x_0-y_0)}\right\}V.$$

即 $V$ 满足（4.43），若引入发散积分的有限部分[123]将（4.68）开拓至 $\alpha<0$ 情形，则上面结论也同样成立．

为验证满足初始条件，令

$$y=y_0+(x_0-y_0)\tau,$$

则（4.62）变为

$$u(x_0,\ y_0)=\frac{2\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)}\frac{\sin^{1+\alpha}2(x_0-y_0)}{\sin^{\alpha}(x_0+y_0)}$$

$$\times\int_0^1 f\left(2y_0+2(x_0-y_0)\tau\right)\sin^\alpha[2y_0+2(x_0-y_0)\tau]$$

$$\times\left\{\left[\sin2(x_0-y_0)(1-\tau)\sin2\ (x_0-y_0)\tau\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right.$$

$$\int_{(x_0-y_0)(2\tau-1)}^{-x_0+y_0}\left[\sin(x_0-y_0+\eta)\ \sin(x_0-y_0-\eta)\right]^{-1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$F\left(\alpha,1-\alpha,1,\frac{\sin\frac{(x_0-y_0)(2\tau-1)+\eta}{2}\sin\frac{(x_0-y_0)(2\tau-1)-\eta}{2}}{-\sin2(y_0+(x_0-y_0)\tau)\sin(x_0+y_0)}\right)$$

$$\left.d\eta\right\}(x_0-y_0)d\tau.$$

让$x_0-y_0\to0$，则里面对$\eta$的积分为零．注意到

$$\lim_{x_0-y_0\to0}\frac{(x_0-y_0)\sin^{1+\alpha}2(x_0-y_0)}{[\sin2(x_0-y_0)(1-\tau)\sin2\ (x_0-y_0)\tau]^{1+\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\tau)^{-1-\frac{\alpha}{2}}\tau^{-1-\frac{\alpha}{2}}.$$

则有

$$\lim_{x_0-y_0\to0}u\left(x_0,\ y_0\right)$$

$$=\frac{2\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}f\ (2y_0)\int_0^1\frac{1}{2}\tau^{-1-\frac{\alpha}{2}}(1-\tau)^{-1-\frac{\alpha}{2}}d\tau$$

$$=\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} f(2y_0) B\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= f(2y_0).$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}-\frac{\partial u}{\partial y_0}\right)_{x_0=y_0}=0$ 也可仿〔121〕中一样进行验证。

注 考虑方程

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta'\varphi'(\eta)}{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}u_\xi+\frac{\beta\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}u_\eta=0. \tag{4.70}$$

其中 $\beta$；$\beta'=\text{const}$，$\varphi$是单调函数，具有所需的导数．求（2）的变数分离解，令 $u(\xi, \eta)=f(\xi)g(\eta)$，则得

$$f'(\xi)g'(\eta)-\frac{\beta'\varphi'(\eta)}{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}f'(\xi)g(\eta)$$

$$+\frac{\beta\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}f(\xi)g'(\eta)=0.$$

从而

$$\varphi'(\xi)+\beta'\varphi'(\xi)\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\varphi(\eta)+\beta'\varphi'(\eta)\frac{g(\eta)}{g'(\eta)}=\varphi(t),$$

其中 $t$ 是分离常数．由此得 $f(\xi)$和$g(\eta)$的常微分方程

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\beta\varphi'(\xi)}{\varphi(t)-\varphi(\xi)};$$

$$\frac{g'(\eta)}{g(\eta)}=\frac{\beta'\varphi'(\eta)}{\varphi(t)-\varphi(\eta)}.$$

并且不难求出它们的解分别为

$$f(\xi)=[\varphi(t)-\varphi(\xi)]^{-\beta};$$

$$g(\eta)=[\varphi(t)-\varphi(\eta)]^{-\beta'}.$$

因此 有解

$$[\varphi(t)-\varphi(\xi)]^{-\beta}[\varphi(t)-\varphi(\eta)]^{-\beta'}.$$

对分离常数 $t$ 进行连续迭加后，可得（2）更为一般的解

$$\int_A^B F(t)[\varphi(t)-\varphi(\xi)]^{-\beta}[\varphi(t)-\varphi(\eta)]^{-\beta'}d\varphi(t). \tag{4.71}$$

其中 $F$ 为任意函数，$A$，$B$ 是任意常数．经过简单的论证，可以推出，如将（3）的积分限改为特征坐标

$$\int_\eta^\xi F(t)[\varphi(\xi)-\varphi(t)]^{-\beta}[\varphi(t)-\varphi(\eta)]^{-\beta'}d\varphi(t). \tag{4.72}$$

也是（4.70）的解，（其中设 $\varphi$ 为单增函数）．

如果对方程（4.70）进行未知函数变换，令

$$u(\xi,\ \eta)=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}z(\xi,\ \eta). \tag{4.73}$$

则

$$u_\xi=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}z_\xi+(1-\beta-\beta')$$
$$\times[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{-\beta-\beta'}\varphi'(\xi)z,$$
$$u_\eta=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}z_\eta-(1-\beta-\beta')$$
$$\times[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{-\beta-\beta'}\varphi'(z)z,$$
$$u_{\xi\eta}=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}z_{\xi\eta}-(1-\beta-\beta')$$
$$\times[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{-\beta-\beta'}\varphi'(\eta)z_\xi$$
$$+(1-\beta-\beta')[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{-\beta-\beta'}\varphi'(\xi)z_\eta$$

$$+(1-\beta-\beta')(\beta+\beta')[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{-\beta-\beta'-1}$$
$$\times\varphi'(\xi)\varphi'(\eta)z.$$

代入方程（4.70）得

$$[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}\left\{z_{\xi\eta}-\frac{(1-\beta)\varphi'(\eta)}{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}z_{\xi}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-\beta')\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\eta)}z_{\eta}\right\}=0. \tag{4.74}$$

即 $z(\xi,\ \eta)$ 满足与（4.70）同类的方程，只是其中 $\beta$、$\beta'$ 顺序代以 $1-\beta'$，$1-\beta$. 如以 $u(\xi,\ \eta;\beta,\ \beta')$ 表示（2）的解，上述事实可以写为

$$u(\xi,\ \eta;\ \beta,\ \beta')$$
$$=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}u(\xi,\ \eta;\ 1-\beta',\ 1-\beta). \tag{4.75}$$

由（4.72）和（4.75）立即推出方程（4.70）有另一含任意函数 $G$ 的解

$$[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi}G(t)[\varphi(\xi)-\varphi(t)]^{\beta'-1}$$
$$\times[\varphi(t)-\varphi(\eta)]^{\beta-1}d\varphi(t). \tag{4.76}$$

总起来我们就得到方程（2）含两个任意函数 $F$、$G$ 的相当一般解（当 $\beta+\beta'\neq 1$ 时）

$$u(\xi,\ \eta)=\int_{\eta}^{\xi}F(t)[\varphi(\xi)-\varphi(t)]^{-\beta}[\varphi(t)-\varphi(\eta)]^{-\beta}$$
$$\varphi'(t)dt+[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi}G(t)[\varphi(\xi)-\varphi(t)]^{\beta'-1}$$
$$\times[\varphi(t]-\varphi(\eta)]^{\beta-1}\varphi'(t)dt \quad 0<\beta,\ \beta'<1. \tag{4.77}$$

有了这个解的表达式，我们就不难将EPD方程的许多结果推广到（4.70）．下面以奇性第三问题为例．

先将（4.77）变成另一形式．令

$$\varphi(t)=\varphi(\xi)(1-\tau)+\varphi(\eta)\tau,$$

则

$$\varphi(\xi)-\varphi(t)=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]\tau,$$

$$\varphi(t)-\varphi(\eta)=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)](1-\tau),$$

$$d\varphi(t)=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]d\tau,$$

积分限变为由0到1，（4.77）变为

$$u(\xi,\ \eta)=[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)]^{1-\beta'-\beta}\int_0^1 F[\varphi(\xi)(1-\tau)+\varphi(\eta)\tau]\tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta'}d\tau+\int_0^1 G[\varphi(\xi)(1-\tau)+\varphi(\eta)\tau]\tau^{\beta'-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau. \tag{4.77'}$$

现在考虑方程（4.70）的奇性第三问题：

$$\begin{cases}(4.70) \qquad 0<\beta,\beta'<1,\ \beta+\beta'\neq 1,\\ u(\xi,\ \xi)=\tau(\xi),\\ u(\xi,\ 0)=\nu(\xi),\ \tau(0)=\nu(0).\end{cases}$$

在（4.77)′中令 $\xi=\eta$ 得

$$\tau(\xi)=F[\varphi(\xi)]\int_0^1\tau^{\beta'-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau$$

$$=B(\beta,\ \beta')F[\varphi(\xi)].$$

因此 $F$ 被 $\tau$ 确定，其中 $B$ 为贝塔函数．代入到（4.47）中再令 $\eta=0$ 得

$$\tau(\xi)=\int_0^{\xi}G(t)[\varphi(\xi)-\varphi(t)]^{-\beta}$$

$$[\varphi(t)-\varphi(0)]^{-\beta'}\varphi'(t)dt+\psi(\xi). \qquad (4.78)$$

其中$\psi(\xi)$是已知函数．奇异积分方程（4.78）中的积分算子是所谓的Kober算子[67]．要确定$G$则须解积分方程

$$\int_0^{\zeta}\bar{G}(t)[\varphi(\zeta)-\varphi(t)]^{-\beta}\varphi'(t)dt=\bar{f}(\zeta). \qquad (4.78)'$$

上式两端乘以$[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]^{\beta-1}$再对$\varphi(\zeta)$由0到$\xi$积分

$$\int_0^{\xi}[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]^{\beta-1}d\varphi(\zeta)\int_0^{\xi}\bar{G}(t)[\varphi(\zeta)-\varphi(t)]^{-\beta}$$

$$\times\varphi'(t)dt=\int_0^{\xi}\frac{\bar{f}(\zeta)d\varphi(\zeta)}{[\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta)]^{\beta-1}}.$$

左端交换积分顺序后再令

$$\psi(\zeta)=\varphi(\xi)(1-\tau)+4(t)\tau,$$

注意

$$\int_t^{\xi}[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]^{\beta-1}[\varphi(\xi)-\varphi(t)]^{-\beta}\varphi'(\zeta)d\zeta$$

$$=\int_0^1\tau^{\beta-1}(1-\tau)^{-\beta}d\tau$$

$$=B(\beta,\ 1-\beta).$$

因此

$$\int_0^{\xi}\bar{G}(t)\,d\varphi(t)=\frac{1}{B(\beta,1-\beta)}\int_0^{\xi}\frac{\bar{f}(\zeta)}{[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]^{\beta-1}}d\varphi(\zeta),$$

两边对$\xi$求导即可解出$\bar{G}$:

$$\bar{G}(\xi)=\frac{1}{B(\beta,1-\beta)}\frac{d}{d\xi}\int_0^{\xi}\frac{\bar{f}(\zeta)}{[\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)]^{\beta-1}}d\varphi(\zeta).$$

由此可诱导出Kober算子

$$I_{\varphi'}^{r,\alpha}F(\xi)=\frac{[\varphi(\xi)]^{-r-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}F(t)[\varphi(\xi)$$

$$-\varphi(t)]^{\alpha-1}[\varphi(t)]^{r}\varphi'(t)dt$$

的一系列性质.

## §3. 奇线是一条特征线的方程

考虑方程:

$$F_a(b)=u_{\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_{\xi}+\frac{b}{\xi}u_{\eta}=0,\quad a,\quad b=\text{const}. \tag{4.79}$$

这个方程是Капилевич提出来的[41], 其特点是以特征线 $\xi=0$ 为奇线, 所以和EPD方程有本质的区别, 不可能化为EPD方程. 但其一系列性质又与EPD方程相仿, 这是因为若在

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}u_{\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_{\eta}=0$$

中, 令 $\eta_1=\frac{\beta'}{a}\eta$, 则 $u_{\eta}=\frac{\beta'}{a}u_{\eta_1}$. 方程变为

$$\frac{\beta'}{a}u_{\xi\eta_1}-\frac{\beta'}{\xi-\frac{a}{\beta'}\eta_1}u_{\xi}+\frac{\frac{\beta'}{a}\beta}{\xi-\frac{a}{\beta'}\eta_1}u_{\eta_1}=0,$$

即

$$u_{\xi\eta_1}-\frac{\alpha}{\xi-\frac{\alpha}{\beta'}\eta_1}u_\xi+\frac{\beta}{\xi-\frac{\alpha}{\beta'}\eta_1}u_{\eta_1}=0.$$

令$\beta'\to\infty$，再将$\eta_1$写为$\eta$，即得

$$u_{\xi\eta}-\frac{\alpha}{\xi}u_\xi+\frac{\beta}{\xi}u_\eta=0.$$

所以此方程是 EPD 方程的极限情形，本节前四段考虑（4.79）的Riemann函数．特征问题的解，最后建立其与 EPD 方程的联系．

**1.方程$F_a(b)=0$的若干性质**

1）考虑更一般的方程

$$u_{\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_\xi+\frac{b}{\xi}u_\eta+\frac{c}{\xi^2}u=0.$$

易算出不变量为$h=\frac{a(b-1)-c}{\xi^2}$，$k=\frac{ab-c}{\xi^2}$．因此，可以找到这样的$a_1$、$b_1$，使

$$h_1=\frac{a_1(b_1-1)}{\xi^2}=\frac{a(b-1)-c}{\xi^2},$$

$$k=\frac{a_1b_1}{\xi^2}=\frac{ab-c}{\xi^2},$$

即$a_1b_1-a_1=ab-a-c$，$a_1b_1=ab-c$．所以$a_1=a$，$b_1=b-\frac{c}{a}$．则方程

$$u_{\xi\eta}+\frac{c}{\xi}u_\xi+\frac{b-\frac{c}{a}}{\xi}u_\eta=0. \tag{4.80}$$

与（4.79）有相同的不变量．因此，在未知函数的乘子变换下，（4.79）可化为（4.80）．不难找到乘子为$\xi^{-\frac{c}{a}}$，于是，令$u=\xi^{-\frac{c}{a}}u_1$，则（4.79）化为

$$u_{\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_\xi+\frac{b-\frac{c}{a}}{\xi}u_\eta=0.$$

对（4.79），由不变量$h$、$k$易见，当$a=0$，$b=0$，$b=1$三种情形，$F_a(b)=0$均初等可积．事实上，当$a=0$时，方程为

$$u_{\xi\eta}-\frac{b}{\xi}u_\eta=0.$$

易解出$u(\xi,\ \eta)=\xi^{-b}\int\varphi(\eta)d\eta+\psi(\xi)$．

$b=0$时，方程变为

$$u_{\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_\xi=0.$$

得$u(\xi,\ \eta)=\int\varphi(\xi)e^{-\frac{a\eta}{\xi}}d\xi+\psi(\eta)$．

$b=1$时，方程可写为

$$\xi u_{\xi\eta}+au_\xi+u_\eta=0,$$

即$(\xi u_\eta+au)_\xi=0$．

于是得到$u(\xi,\eta)=e^{-\frac{a\eta}{\xi}}\psi(\xi)+\xi^{-1}\varphi(\eta)$。

类似于第一章，利用瀑布法可证，$b$为正、负整数时，均为可积情形。

2）递推式

记$u(b)$为$F_a(b)=0$的解，则将（4.79）写为

$$\xi u_{\xi\eta}+au_\xi+bu_\eta=0.$$

对$\xi$微分，得

$$\xi(u_\xi)_{\xi\eta}+a(u_\xi)_\xi+(b+1)(u_\xi)_\xi=0.$$

从而有

$$\frac{\partial^m u(b)}{\partial\xi^m}=u(b+m). \tag{4.81}$$

其次，将$F_a(b)=0$写为

$$\left(u_\xi+\frac{b}{\xi}u\right)_\eta+\frac{a}{\xi}\left(u_\xi+\frac{b}{\xi}u\right)-\frac{ab}{\xi^2}u=0.$$

令$u_\xi+\frac{b}{\xi}u=u_1$，于是

$$u_{1\xi}+\frac{a}{\xi}u_1-\frac{ab}{\xi^2}u=0.$$

方程再对$\xi$微商一次，得

$$u_{1\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_{1\xi}-\frac{a}{\xi^2}u_1-\frac{ab}{\xi^2}u_\xi+\frac{2ab}{\xi^3}u=0.$$

由$u_\xi=u_1-\frac{b}{\xi}u$，再利用$\frac{ab}{\xi^2}u=u_{1\eta}+\frac{a}{\xi}u_1$，

方程变为

$$u_{1\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_{1\xi}+\frac{b+2}{\xi}u_{1\eta}+\frac{a}{\xi^2}u_1=0.$$

令$u_1=\xi^{-1}V$，即得

$$V_{\xi\eta}+\frac{a}{\xi}V_\xi+\frac{b+1}{\xi}V_\eta=0.$$

于是，有

$$\frac{V}{b}=u(b)+\frac{\xi}{b}\cdot\frac{\partial u(b)}{\partial\xi}.$$

而$V=u(b+1)$，所以，$u(b+1)=u(b)+\dfrac{\xi}{b}\cdot\dfrac{\partial u(b)}{\partial\xi}$，

$$\prod_{i=0}^{m-1}\left[1+\frac{\xi}{b+i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right]u(b)=u(b+m). \qquad (4.81)'$$

若将$F_a(b)=0$改写为

$$\left(u_\eta+\frac{a}{\xi}u\right)_\xi+\frac{b}{\xi}u_\eta+\frac{a}{\xi^2}u$$

$$=\left(u_\eta+\frac{a}{\xi}\right)_\xi+\frac{b}{\xi}\left(u_\eta+\frac{a}{\xi}u\right)+\frac{a(1-b)}{\xi^2}u$$

$$=0,$$

令$u_\eta+\dfrac{a}{\xi}u=u_{-1}$，则

$$u_{-1\xi}+\frac{b}{\xi}u_{-1}+\frac{a(1-b)}{\xi^2}u=0.$$

对η微商一次，得

$$u_{-1\xi\eta}+\frac{b}{\xi}u_{-1\eta}+\frac{a(1-b)}{\xi^2}u_\eta=0.$$

将$u_\eta=u_{-1}-\frac{a}{\xi}u$和$-\frac{a(1-b)}{\xi^2}u=u_{-1\xi}+\frac{b}{\xi}u_{-1}$

代入，得

$$u_{1\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_{-1\xi}+\frac{b}{\xi}u_{-1\eta}+\frac{a}{\xi^2}u_{-1}=0.$$

令$u_{-1}=\xi^{-1}V$，得

$$V_{\xi\eta}+\frac{a}{\xi}V_\xi+\frac{b-1}{\xi}V_\eta=0.$$

从而有

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{\xi}{a}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)u(b)=u(b-1),\\ \left(1+\frac{\xi}{a}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m b(b)=u(b-m).\end{gathered}\tag{4.82}$$

容易证明：当$b\neq 0$，$-1$，$-2$，…，$-(m+1)$时，$F_a(b+m)=0$的解可通过（4.81），（4.81）′导出，当$b\neq 1$，2，…，$m$时，$F_a(b-m)=0$的解可由$F_a(b)=0$的解通过（4.82）导出，因此只须对$0<b<1$求出解的一般表达式。

3）变换群

通过计算不难表明：方程$F_a(b)=0$在变换

$$\xi=\frac{\lambda\xi_1}{c_1\xi_1+1},\quad \eta=\lambda\eta_1+c_2$$

下不变量不变，其变换的乘子为

$$M(\xi,\ \eta)=\exp\left\{\int\left(\frac{b}{\xi(c_1\xi+1)}-\frac{b}{\xi}\right)d\xi\right.$$

$$+\left[\frac{(c_1\xi+1)a}{\xi}-\frac{a}{\xi}\right]d\eta\Big\}$$

$$=\exp\left\{\ln(c_1\xi+1)^{-b}+c_1a\eta\right\}$$

$$=e^{c_1a\eta}(c_1\xi+1)^{-b}.$$

因此，若$u(\xi,\eta)$是方程$F_a(b)=0$的解，则

$$u_1(\xi,\eta)=(c_1\xi+1)^{-b}e^{c_1a\eta}u\left(\frac{\lambda\xi}{c_1\xi+1},\ \lambda\eta_1+c_1\right)$$

也是方程的解.

**2. Riemann函数**

方程$F_a(b)=0$的Riemann函数$V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$应是下列问题的解：

$$\begin{cases} M(V)=V_{\xi\eta}-\dfrac{a}{\xi}V_\xi-\dfrac{b}{\xi}V_\eta+\dfrac{a}{\xi^2}V=0, \\ \left.\dfrac{V_\eta}{V}\right|_{\xi=\xi_0}=\dfrac{a}{\xi_0}. \\ \text{即}\ln V\Big|_{\xi=\xi_0,\ \eta=\eta_0}^{\eta=\eta}=\dfrac{a}{\xi_0}\eta\Big|_{\eta=\eta_0}^{\eta=\eta}=\dfrac{a(\eta-\eta_0)}{\xi_0}, \\ \text{即}V|_{\xi=\xi_0}=\exp\left\{\dfrac{a(\eta-\eta_0)}{\xi_0}\right\}, \\ \left.\dfrac{V_\xi}{V}\right|_{\eta=\eta_0}=\dfrac{b}{\xi},\quad \text{即}\ln V\Big|_{\eta=\eta_0,\ \xi=\xi_0}^{\xi=\xi}=\ln\xi^b\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi}, \\ V\Big|_{\eta=\eta_0}=\left(\dfrac{\xi}{\xi_0}\right)^b, \\ V\Big|_{\eta=\eta_0}^{\xi=\xi_0}=1. \end{cases} \tag{4.83}$$

我们还是通过求特解的方法求出一类含几个参变数的解，然后适当选择参数得到 Riemann 函数。试求$M[V]=0$ 的形如 $V=\xi^{c}f(t)$，$t=a\dfrac{\eta}{\xi}$的特解，则经过计算，代入$M[V]=0$，得到

$$-a\xi^{c-2}\left\{a\frac{\eta}{\xi}f''(t)+f'(t)-cf'(t)-\frac{a\eta}{\xi}f'(t)+cf(t)\right.$$

$$\left.+bf'(t)-f(t)\right\}=0,$$

即

$$tf''(t)+[(1-c+b)-t]f'(t)-(1-c)f(t)=0. \tag{4.84}$$

这是常微分方程，称为合流超几何方程，它可由超几何方程的两个奇点 1 与∞相合时得到。

在超几何方程

$$t(1-t)f''(t)+[c-(a+b+1)t]f'(t)-abf(t)=0$$

中，将 $t$ 换为 $t_1=\dfrac{t}{b}$，然后用 $b$ 除，得

$$bt\left(1-\frac{t}{b}\right)f''(t)+b\left[c-(a+b+1)\frac{t}{b}\right]f'(t)-baf(t)=0,$$

即

$$t\left(1-\frac{t}{b}\right)f''(t)+\left[c-(a+b+1)\frac{t}{b}\right]f'(t)-af(t)=0.$$

令 $b\to\infty$，得

$$tf''(t)+[c-t]f'(t)-af(t)=0.$$

这个方程 0，∞两个奇点，$b$ 与∞合流，故称为合流超几何方程。

在超几何函数

$$F(a, b, c, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n$$

中，以$\frac{t}{b}$代$z$，再令$b\to\infty$，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!(c)_n}t^n=\phi(a, c, t),$$

称为合流超几何函数，故$M(V)=0$有特解

$$\xi^c\phi\left(1-c, 1-c+b, \frac{a\eta}{\xi}\right). \tag{4.85}$$

由于合流超几何方程与超几何方程有如上关系，所以前者的解——合流超几何函数都可以由超几何函数取极限而得到，例如，超几何级数的积分表达式

$$F(a, b, c, z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}$$
$$\times(1-zt)^{-b}dt$$

中，以$\frac{z}{b}$代替$z$，得到

$$F\left(a, b, c, \frac{z}{b}\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}$$
$$\times\left(1-\frac{zt}{b}\right)^{-b}dt.$$

利用$\lim\limits_{b\to\infty}\left(1-\frac{zt}{b}\right)^{-b}=e^{zt}$，得到

$$\lim_{b\to\infty} F\left(a, b, c, \frac{z}{b}\right) = \phi(a, c, z)$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{zt}dt$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} z^{-a}\int_0^z \tau^{a-1}\left(1-\frac{\tau}{z}\right)^{c-a-1}e^{\tau}d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(c)e^z z^{a-c}}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^z \tau^{c-a-1}\left(1-\frac{\tau}{z}\right)^{a-1}e^{-\tau}d\tau.$$

又如由超几何级数的关系式

$$F\left(a, b, c, z\right) = (1-z)^{-b}F\left(b, c-a, c, \frac{z}{z-1}\right),$$

将 $z$ 代入 $\frac{z}{b}$，令 $b\to\infty$，即得

$$\phi(a, c, z) = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{z}{b}\right)^{-b}F\left(b, c-a, c, \frac{z}{z-b}\right)$$

$$= e^z\phi(c-a, c, -z).$$

现在回到 $M[V]=0$，令 $\xi = \frac{\lambda\xi_1}{c_1\xi_1+1}$，$\eta = \lambda\eta_1 + c_2$，$M[V]=0$ 化为

$$V_{\xi_1\eta_1} - \frac{a(c_1\xi_1+1)}{\xi_1}V_{\xi_1} - \frac{b}{\xi_1(c_1\xi_1+1)} + \frac{a}{\xi_1^2}V = 0.$$

再令 $V(\xi_1, \eta_1) = (c_1\xi_1+1)^{-b}e^{ac_1\eta_1}u(\xi_1, \eta_1)$，

则 $u(\xi_1, \eta_1)$ 满足

$$u_{\xi_1\eta_1} - \frac{a}{\xi_1}u_{\xi_1} - \frac{b}{\xi_1}u_{\eta_1} + \frac{a}{\xi_1^2}u = 0.$$

这又是$M[V]=0$，由前面求出的特解，得到$M[V]=0$的含参数的解为

$$c_3(c_1\xi+1)^b e^{-ac\eta}\left(\frac{\lambda\xi}{c_1\xi_1+1}\right)^c$$

$$\times\phi\left[1-c,\ 1-c+b,\ \frac{a(c_1\xi+1)(\lambda b+c_2)}{\lambda\xi}\right].$$

其中$c$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $\lambda\neq 0$均为常数。

现在我们来选择任意常数使得满足Riemann条件（4.83）。因$\phi(a,\ c,\ 0)=1$，要使$\frac{a(c_1\xi+1)(\lambda\eta+c_2)}{\lambda\xi}$当$\xi=\xi_0$，$\eta=\eta_0$时为零，则$\lambda\eta_0+c_2=0$，$c_2=-\lambda\eta_0$; $c_1\xi_0+1=0$，$c_1=-\frac{1}{\xi_0}$. 另外，要使$\eta=\eta_0$时，$V=\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^b$，显然必须$c=b$，$\lambda=\frac{1}{\xi_0}$以及$c_3=e^{ac_1\eta_0}$。这样，

$$V|_{\xi=\xi_0}=e^{\frac{a(\eta-\eta_0)}{\xi}}$$

也满足。因此，

$$V(\xi,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)$$

$$=\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^b e^{\frac{a(\eta-\eta_0)}{\xi}}\phi\left(1-b,\ 1,\ \frac{a(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}{\xi\xi_0}\right). \tag{4.86}$$

由于合流超几何级数的收敛半径是$\infty$（因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a)_n}{n!(c)_n}x^n\Big/\frac{(a)_{n-1}}{(n-1)!(c)_{n-1}}x^{n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+n-1)}{n(c+n-1)}=0\Big),$$

因此，除去 $\xi=0$ 和无穷远点外，(4.86) 都是有定义的。

3. Goursat问题

1. 设 $a>0$，$0<b<1$，考虑如下问题：

$$\begin{cases} F_a(b)=0, \\ u(0,\ \eta)=f(\eta), \quad 0\leqslant\eta<+\infty, \\ u(\xi,\ 0)=g(\xi), \quad 0\leqslant\xi<+\infty. \end{cases} \tag{4.87}$$

如图 9，在特征矩形$\square MPQR$上应用Green公式于恒等式：

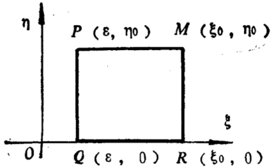



图 9

$$v\left(u_{\xi\eta}+\frac{a}{\xi}u_\xi+\frac{b}{\xi}u_\eta\right)-u\left(v_{\xi\eta}-\frac{a}{\xi}v_\xi-\frac{b}{\xi}v_\eta+\frac{a}{\xi^2}v\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u_\eta v-uv_\eta+\frac{2a}{\xi}uv\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u_\xi v-uv_\xi+\frac{2b}{\xi}uv\right).$$

设 $u$ 是$F_a(\cdot b)=0$ 的解，$v$ 是Riemann函数，则有

$$0=\int_{\square MPQR}\frac{1}{2}\left(vu_\eta-uv_\eta+\frac{2a}{\xi}uv\right)-\frac{1}{2}\left(vu_\xi-uv_\xi\right.$$

$$\left.+\frac{2b}{\xi}uv\right)d\xi$$

$$= -\frac{1}{2}\int_M^P \left(vu_\xi - uv_\xi + \frac{2b}{\xi}uv\right)d\xi + \frac{1}{2}\int_P^Q\left(vu_\eta - uv_\eta\right.$$

$$\left. + \frac{2a}{\xi}uv\right)d\eta - \frac{1}{2}\int_Q^R\left(vu_\xi - uv_\xi + \frac{2b}{\xi}uv\right)d\xi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_R^M \left(vu_\eta - uv_\eta + \frac{2a}{\xi}uv\right)d\eta$$

$$= -\frac{1}{2}(uv)_{\eta=\eta_0}\Big|_M^P + \int_M^P u\left(v_\xi - \frac{b}{\xi}v\right)d\xi$$

$$+ \frac{1}{2}(uv)_{\xi=\varepsilon}\Big|_P^Q - \int_P^Q u\left(v_\eta - \frac{a}{\xi}\right)d\eta - \frac{1}{2}(uv)_{\eta=0}\Big|_Q^R$$

$$+ \int_Q^R u\left(v_\xi - \frac{b}{\xi}v\right)d\xi + \frac{1}{2}(uv)_{\xi=\xi_0}\Big|_R^M -$$

$$\int_R^M u\left(v_\eta - \frac{b}{\xi}v\right)d\eta.$$

利用（4.83），得到

$$0 = u(\xi_0, \eta_0) - v(\varepsilon, \eta; \varepsilon_0, \eta_0)u(\varepsilon, \eta_0)$$

$$+ v(\varepsilon, 0; \xi_0, \eta_0)u(\varepsilon, 0) - v(\xi_0, 0; \xi_0, \eta_0)u(\xi_0, 0)$$

$$- \int_P^Q u\left(v_\eta - \frac{a}{\xi}\right)d\eta + \int_Q^R u\left(v_\xi - \frac{b}{\xi}v\right)d\xi,$$

即

$$u(\xi_0, \eta_0) = v(\varepsilon, \eta_0; \xi_0, \eta_0)u(\varepsilon, \eta_0) + v(\xi_0, 0; \xi_0, \eta_0).$$

$$u(\xi_0, 0) - v(\varepsilon, 0; \xi_0, \eta_0)u(\varepsilon, 0) + \int_Q^P$$

$$u\left(v_\eta - \frac{a}{\xi}\right)d\eta - \int_Q^R u\left(v_\xi - \frac{b}{\xi}v\right)d\xi$$

$$=\left(\frac{\varepsilon}{\xi_0}\right)^b u(\varepsilon,\ \eta_0)+e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}g(\xi_0)-g(\varepsilon)v(\varepsilon,\ 0;\xi_0,\ \eta_0)$$

$$-\int_0^{\eta_0}u(\varepsilon,\ \eta_0)[v_\eta(\varepsilon,\ \eta;\xi_0,\ \eta_0)-\frac{a}{\varepsilon}v(\varepsilon,\eta;\xi_0,\eta_0)]d\eta$$

$$-\int_\varepsilon^{\xi_0}g(\xi)[v_\xi(\xi,\ 0;\xi_0,\eta_0)-\frac{b}{\xi}v(\xi,0;\xi_0,\eta_0)]d\xi. \tag{4.88}$$

注意Riemann 函数 $v=\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^b e^{\frac{a(\eta-\eta_0)}{\xi_0}}$

$$\times\phi\left(1-b,\ 1,\ \frac{a(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}{\xi\xi_0}\right),$$

利用

$$\frac{d}{d\sigma}\phi(a,\ c,\ \sigma)=\frac{a}{c}\phi(a+1,\ c+1,\ \sigma),$$

可计算出$v_\eta$, $v_\xi$.

$$v_\eta-\frac{a}{\xi_0}v=(1-b)\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^b e^{\frac{a(\eta-\eta_0)}{\xi_0}}$$

$$\times\phi\left(2-b,\ 2,\ \frac{a(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{\xi\xi_0}\right)\frac{a(\xi_0-\xi)}{\xi\xi_0},$$

$$v_\xi-\frac{b}{\xi}=\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^b e^{\frac{a(\eta-\eta_0)}{\xi_0}}$$

$$\times\phi\left(2-b,\ 2,\ \frac{a(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}{\xi\xi_0}\right)\frac{a(\eta_0-\eta)}{\xi^2}.$$

当 $\xi \to 0$ 时，$\dfrac{a(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}{\xi\xi_0} \to -\infty$，这时，利用合流超几何函数渐近展开式〔122〕

$$\phi(a,\ c,\ z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{\pm \pi a i} z^{-a}$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (1-c+a)_n}{n!\, z^n} \right\} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c+a)_n (1-a)_n}{n!\, z^n} \right\},$$

得到

$$\phi(1-b,\ 1,\ \sigma) \to \frac{(-1)^{1-b}(\sigma)^{b-1}}{\Gamma(b)}.$$

于是

$$\phi(1-b,\ 1,\ \sigma) = \frac{(-\sigma)^{b-1}}{\Gamma(b)} + 0(1).$$

所以，$v_\eta - \dfrac{a}{\xi} v \to -\xi_0^{-b} a^b (\eta_0-\eta)^{b-1} e^{\frac{a(\eta-\eta_0)}{\xi_0}} / \Gamma(b)$.

类似地，当 $\xi \to 0$ 时，$v_\xi - \dfrac{b}{\xi} v \to -a^{b-1} \xi_0^{-b} (\eta_0-\eta)^{b-1}$，

所以，(4.87) 最后一个积分可积。

而

$$v(\xi,\ 0;\ \xi_0,\ \eta_0) - \frac{b}{\xi} v(\xi,\ 0;\ \xi_0,\ \eta_0)$$

$$= \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^b e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}} \frac{a\eta_0}{\xi^2} \cdot \phi\left(2-b,\ 2,\ \frac{a\eta_0(\xi-\xi_0)}{\xi\xi_0}\right),$$

$$v(\xi_0,\ 0;\xi_0,\ \eta_0)=e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}},$$

最后得到

$$\begin{aligned}
&u(\xi_0,\ \eta_0)\\
&=g(\xi_0)e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}+\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a}{\xi_0}\right)^b\int_0^{\eta_0}(\eta_0-t)^{b-1}\\
&\times e^{-\frac{a(\eta_0-t)}{\xi_0}}f(t)dt+\frac{(1-b)a\eta_0}{\xi_0{}^b}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^{\xi_0}g(t)\\
&\times t^{b-2}\phi\left(2-b,\ 2,\ \frac{-a\eta_0(\xi_0-t)}{\xi_0 t}\right)dt\\
&=u_1+u_2+u_3. \qquad (4.89)
\end{aligned}$$

我们验证（4.89）满足定解条件和方程．先验证满足定解条件，

$$u_1(0,\ \eta_0)=\lim_{\xi_0\to 0}g(\xi_0)e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}=0,$$

$$\begin{aligned}
u_2(0,\ \eta_0)&=\lim_{\xi_0\to 0}\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a}{\xi_0}\right)^b\int_0^{\eta_0}f(t)(\eta_0-t)^{b-1}\\
&\quad\times e^{-\frac{a(\eta_0-t)}{\xi_0}}dt\\
&=\lim_{\xi_0\to 0}\frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^{\frac{a\eta_0}{\xi_0}}f\left(\eta_0-\frac{\xi_0\tau}{a}\right)\tau^{b-1}e^{-\tau}d\tau\\
&=\frac{1}{\Gamma(b)}f(\eta_0)\int_0^{\infty}e^{-\tau}\tau^{b-1}d\tau=f(\eta_0),
\end{aligned}$$

$u_3$表示的积分不是瑕积分，因为

$$\phi\left(2-b,\ 2,\ \frac{-a(\xi_0-t)\eta_0}{\xi_0 t}\right)$$

$$=\frac{\left[\frac{a\eta_0(\xi_0-t)}{\xi_0 t}\right]^{b-2}}{\Gamma(2-b)\Gamma(b)}\int_0^\sigma \tau^{1-b}\left(1-\frac{\tau}{\sigma}\right)^{b-1}e^{-\tau}d\tau,$$

其中 $\sigma=\frac{a\eta_0(\xi_0-t)}{\xi_0 t}$。

所以

$$u_\xi(\xi_0,\ \eta_0)=\frac{(1-b)a\eta_0}{\Gamma(2-b)\Gamma(b)\xi_0{}^b}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^{\xi_0} g(t)$$

$$\left[\frac{a\eta_0(\xi_0-t)}{\xi_0}\right]^{b-2}\int_0^\sigma \tau^{1-b}\left(1-\frac{\tau}{\sigma}\right)^{b-1}e^{-\tau}d\tau dt.$$

因此积分在 $t=0$ 处收敛．由

$$\phi\left(2-b,\ 2,\ \frac{-a\eta_0(\xi_0-t)}{\xi_0 t}\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-b)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{1-b}(1-t)^{b-1}e^{-\sigma t}dt,$$

所以，$t=\xi_0$ 时，积分也收敛．因而 $\xi_0\to 0$ 时，$u_\xi(0,\ \eta_0)\to 0$。故 $u(0,\ \eta_0)=f(\eta_0)$。

同样可证 $\eta_0=0$ 时，$u(\xi_0,\ 0)=g(\xi_0)$。

其次，验证（4.89）满足方程．对于 $u_1(\xi_0,\ \eta_0)=g(\xi_0)\ e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}$，直接计算表明

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi_0\partial\eta_0}+\frac{a}{\xi_0}\frac{\partial u_1}{\partial\xi_0}+\frac{b}{\xi_0}\frac{\partial u_1}{\partial\eta_0}=\frac{a(1-b)}{\xi_0{}^2}g(\xi_0)\ e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}. \tag{4.90}$$

对于$u_2$，有

$$u_2(\xi_0,\ \eta_0)=\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a}{\xi_0}\right)^b\int_0^{\eta_0}(\eta_0-t)^{b-1}e^{-\frac{a(\eta_0-t)}{\xi_0}}f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a\eta_0}{\xi_0}\right)^b\int_0^1(1-t)^{b-1}e^{-\frac{a\eta_0(1-t)}{\xi_0}}f(\eta_0 t)dt.$$

不难由计算得到

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi_0\partial\eta_0}+\frac{a}{\xi_0}\frac{\partial u_2}{\partial\xi_0}+\frac{b}{\eta_0}\frac{\partial u_2}{\partial\eta_0}=\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a\eta_0}{\xi_0}\right)^b\int_0^1(1-t)^{b-1}$$

$$\times e^{-\frac{a\eta_0(1-t)}{\xi_0}}\left[\frac{-abt}{\xi_0^2}f(\eta_0 t)+\frac{a^2\eta_0 t(1-t)}{\xi_0^3}f(\eta_0 t)\right.$$

$$\left.+\frac{a(1-t)}{\xi_0^2}f(\eta_0 t)+\frac{a\eta_0 t(1-t)}{\xi_0^2}f'(\eta_0 t)\right]dt. \qquad (4.91)$$

将上式右边第四项分部积分，得

$$\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a\eta_0}{\xi_0}\right)^b\int_0^1 t(1-t)^b\frac{a\eta_0}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0(1-t)}{\xi_0}}f'(\eta_0 t)dt$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a\eta_0}{\xi_0}\right)^b\int_0^1\frac{a}{\xi_0^2}f(\eta_0 t)\frac{d}{dt}\left[t(1-t)e^{-\frac{a\eta_0(1-t)}{\xi_0}}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a\eta_0}{\xi_0}\right)^b\int_0^1(1-t)^{b-1}e^{-\frac{a\eta_0(1-t)}{\xi_0}}\left[-\frac{a(1-t)}{\xi_0^2}f(\eta_0 t)\right.$$

$$\left.+\frac{abt}{\xi_0^2}f(\eta_0 t)-\frac{a^2\eta_0 t(1-t)}{\xi_0^3}f(\eta_0 t)\right]dt.$$

将此式代入（4.91），即得$u_2$是$F_a(b)=0$的解。

最后验证$u_3(\xi_0,\ \eta_0)$。改写为

$$u_3=-\frac{a(1-b)\eta_0}{\xi_0}\int_0^1 g(\xi_0 t)\,t^{b-2}\phi\left(2-b,2,-\frac{a(1-t)\eta_0}{\xi_0 t}\right)dt$$

$$\times e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}.$$

$$\frac{a}{\xi_0}\frac{\partial u_3}{\partial \xi_0}=-\frac{a}{\xi_0^2}u_3+\frac{a^2\eta_0}{\xi_0^3}u_3-\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}$$

$$\times\int_0^1 g'(\xi_0 t)\cdot t^{b-1}\phi dt-\frac{a^3(1-b)\eta_0^2}{\xi_0^4}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}$$

$$\times\int_0^1 g(\xi_0 t)t^{b-3}\cdot(1-t)\phi' dt,$$

$$\frac{b}{\xi_0}\frac{\partial u_3}{\partial \eta_0}=\frac{b}{\xi_0\eta_0}u_3-\frac{ab}{\xi_0^2}u_3+\frac{a^2b(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}$$

$$\times\int_0^1 g t^{b-3}(1-t)\phi' dt,$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi_0\partial \eta_0}=-\frac{1}{\xi_0\eta_0}u_3+\frac{3a}{\xi_0^2}u_3-\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}$$

$$\times\int_0^1 g t^{b-3}(1-t)\phi' dt-\frac{a^2\eta_0}{\xi_0^3}u_3+\frac{a^3(1-b)\eta_0^2}{\xi_0^4}$$

$$\times e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g t^{b-3}(1-t)\phi' dt-\frac{a(1-b)}{\xi_0}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}$$

$$\times\int_0^1 g'(\xi_0 t)t^{b-1}\phi dt+\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}$$

$$\times\int_0^1 g'(\xi_0 t)t^{b-1}\phi dt$$

$$+\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g'(\xi_0 t)t^{b-3}(1-t)\phi' dt$$

$$-\frac{2a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g t^{b-3}(1-t)\phi' dt$$

$$+\frac{a^3(1-b)\eta_0^2}{\xi_0^4}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g t^{b-3}(1-t)\phi' dt$$

$$+\frac{a^3(1-b)\eta_0^2}{\xi_0^4}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g t^{b-4}(1-t)^2\phi'' dt.$$

其中，$\int_0^1 g'(\xi_0 t)t^{b-1}\phi dt=\xi_0^{-1}\int_0^1\frac{d}{dt}g(\xi_0 t)\ t^{b-1}\phi dt=\frac{g(\xi_0)}{\xi_0}-$
$\xi_0^{-1}\int_0^1 g(\xi_0 t)\frac{d}{dt}(t^{b-1}\phi)dt=\frac{g(\xi_0)}{\xi_0}-\frac{b-1}{\xi_0}\int_0^1 g t^{b-2}\phi dt-\frac{a\eta_0}{\xi_0^2}$
$\int_0^1 g t^{b-3}\phi' dt.$

注意当 $t\to 0$ 时，$-\frac{a(\xi_0-t)}{\xi_0 t}\to-\infty$。所以当 $t\to 0$ 时

$$\phi\left(2-b,\ 2,\ \frac{-a(\xi_0-t)\eta_0}{\xi_0 t}\right)\to$$

$$\frac{1}{\Gamma(b-1)}\left[\frac{a(\xi_0-t)\eta_0}{\xi_0 t}\right]^{b-2}=0\ (t^{b-2}).$$

又

$$\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g'(\xi_0 t)t^{b-2}(1-t)\phi' dt$$

$$=\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1\frac{d}{dt}[g(\xi_0 t)]t^{b-3}(1-t)\phi' dt$$

$$=-\frac{a^3(1-b)\eta_0^2}{\xi_0^4}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g(\xi_0 t)t^{b-4}(1-t)\phi'' dt$$

$$+\frac{a^2(1-b)(2-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g(\xi_0 t)t^{b-3}(1-t)\phi' dt$$

$$+\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g(\xi_0 t)t^{b-2}\phi' dt.$$

因此

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial\xi_0\partial\eta_0}=-\frac{u_3}{\xi_0\eta_0}+\frac{3a}{\xi_0^2}u_3-\frac{a^2\eta_0}{\xi_0^3}u_3-\frac{a(1-b)}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}g(\xi_0)$$

$$+\frac{2a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g t^{b-2}\phi' dt$$

$$+\frac{a(1-b)^2}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g t^{b-2}\phi\, dt$$

$$+\frac{2a^3(1-b)\eta_0^2}{\xi_0^4}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g t^{b-3}(1-t)\phi' dt$$

$$+\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 g'(\xi_0 t)t^{b-1}\phi\, dt$$

$$-\frac{a^3(1-b)\eta_0^2}{\xi_0^4}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 gt^{b-3}(1-t)\phi'' dt$$

$$-\frac{a^2b(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 gt^{b-3}(1-t)\phi' dt.$$

从而，代入$F_a(b)$，经过整理得到

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial\xi_0\partial\eta_0}+\frac{a}{\xi_0}\frac{\partial u_3}{\partial\xi_0}+\frac{b}{\xi_0}\frac{\partial u_3}{\partial\eta_0}$$

$$=\frac{a(2-b)}{\xi_0^2}u_3-\frac{a(1-b)}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}g(\xi_0)$$

$$+\frac{2a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 gt^{b-2}\phi' dt$$

$$+\frac{a^2(1-b)}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 gt^{b-2}\sigma\phi'' dt$$

$$-\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 gt^{b-2}\sigma\phi' dt$$

$$=\frac{a^2(1-b)\eta_0}{\xi_0^3}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}\int_0^1 gt^{b-2}[\sigma\phi''+(2-\sigma)\phi'$$

$$-(2-b)\phi]dt-\frac{a(1-b)}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}g(\xi_0)$$

$$=-\frac{a(1-b)}{\xi_0^2}e^{-\frac{a\eta_0}{\xi_0}}g(\xi_0)$$

$$=-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi_0\partial\eta_0}-\frac{a}{\xi_0}\frac{\partial u_1}{\partial\xi_0}-\frac{b}{\xi_0}\frac{\partial u_1}{\partial\eta_0}.$$

验证完毕。

**5.解的一般表达式**

在EPD方程

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta'}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0$$

中，令$\beta=b$，$\eta=\frac{a}{\beta'}\eta_1$，再让$\beta'\to\infty$即得$F_a(b)=0$。相应的

对于由解

$$\int_\eta^\xi\psi(t)(\xi-t)^{-\beta}(t-\eta)^{-\beta'}dt$$

得到的解

$$\int_{\frac{a}{\beta'}\eta_1}^\xi\psi(t)(\xi-t)^{-b}\left(1-\frac{a\eta_1}{\beta' t}\right)^{-\beta'}t^{-\beta'}dt.$$

让$\beta'\to\infty$，则得

$$\int_0^\xi\psi(t)(\xi-t)^{-b}e^{-\frac{a\eta}{t}}dt=\xi^{1-b}\int_0^1\psi(\xi t)(1-t)^{-b}e^{-\frac{a\eta}{\xi t}}dt.$$

再由3中的$u_2$（因为它满足方程——对任何的$f$）

$$\frac{1}{\Gamma(b)}\left(\frac{a}{\xi}\right)^b\int_0^\eta(\eta-t)^{b-1}e^{-\frac{a(\eta-t)}{\xi}}f(t)dt,$$

记$\frac{1}{\Gamma(b)}f(\eta)=\phi(\eta)$为任意函数，则得

$$\left(\frac{a}{\xi}\right)^b\int_0^\eta\phi(t)(\eta-t)^{b-1}e^{-\frac{a(\eta-t)}{\xi}}dt$$

$$=\left(\frac{a\eta}{\xi}\right)^b\int_0^1\phi(\eta t)(1-t)^{b-1}\cdot e^{-\frac{a\eta}{\xi}(1-t)}dt.$$

因此，$F_a(b)=0$有含两个任意函数$\phi$，$\psi$的一般解

$$u(\xi,\ \eta)=\left(\frac{a\eta}{\xi}\right)^b\int_0^1\phi(\eta t)(1-t)^{b-1}e^{-\frac{a\eta(1-t)}{\xi}}dt$$

$$+\xi^{1-b}\int_0^1\psi(\xi t)(1-t)^{-b}e^{-\frac{a\eta}{\xi}}dt,\quad 0<b<1. \qquad (4.92)$$

若在EPD方程的Riemann函数

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$$

$$=\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}}{(\xi-\eta_0)^{\beta'}(\xi_0-\eta)^{\beta}}F\left(\beta,\ \beta',\ 1,\ \frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}\right)$$

中，令$\eta=\frac{a}{\beta'}\eta_1$，$\eta_0=\frac{a}{\beta'}\eta_{10}$，则

$$\frac{(\xi-\eta)^{\beta+\beta'}}{(\xi-\eta_0)^{\beta'}(\xi_0-\eta)^{\beta}}=\left(\frac{\xi-\frac{a}{\beta'}\eta_1}{\xi_0-\frac{a}{\beta'}\eta_1}\right)^{\beta}\left(1-\frac{a\eta_1}{\beta'\xi}\right)^{\beta'}$$

$$\times\left(1-\frac{a\eta_0}{\beta'\xi}\right)^{-\beta'},\quad \frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)}=\frac{a(\xi_0-\xi)(\eta_1-\eta_0)}{\left(\xi-\frac{a\eta_{10}}{\beta'}\right)\left(\xi_0-\frac{a\eta_1}{\beta'}\right)^{\beta'}}.$$

当$\beta'\to\infty$时，

$$v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)\to$$

$$\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\beta}e^{\frac{a\eta_1}{\xi}}e^{-\frac{a\eta_{10}}{\xi}}\phi\left(b,\ 1,\ \frac{a(\xi_0-\xi)(\eta_1-\eta_0)}{\xi\xi_0}\right).$$

这正是$F_a(b)=0$的Riemann函数（见Ⅰ）.

最后指出，（4.92）中第一项也可由EPD方程中解的一般表达式中的另一项

$$(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\xi}\phi(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}dt$$

取极限而得到。

事实上，当$\eta$代之以$\frac{a}{\beta'}\eta$后，再令$t=\frac{a}{\beta'}t$，

则得

$$\left(\xi-\frac{a}{\beta'}\right)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\frac{\beta'}{a}\xi}\phi\left(\frac{a}{\beta'}t\right)\left(\xi-\frac{a}{\beta'}t\right)^{\beta'-1}(t-\eta)^{\beta-1}$$

$$\left(\frac{a}{\beta'}\right)^{\beta}dt.$$

仍记$\beta'^{-\beta}\phi\left(\frac{a}{\beta'}t\right)=\phi(t)$，由$\left(\xi-\frac{a}{\beta'}\eta\right)^{1-\beta-\beta'}\to\xi^{1-\beta-\beta'}$

$$\times e^{-\frac{a\eta}{\xi}},\ \left(\xi-\frac{a}{\beta'}t\right)^{\beta'-1}\to\xi^{\beta'-1}e^{\frac{at}{\xi}},$$代入得到（令$\beta'\to\infty$）

$$\left(\xi-\frac{a}{\beta'}\eta\right)^{1-\beta-\beta'}\int_{\eta}^{\frac{\beta'}{a}\xi}\phi\left(\frac{a}{\beta'}t\right)\left(\xi-\frac{a}{\beta'}t\right)(t-\eta)^{\beta-1}$$

$$\times\left(\frac{a}{\beta'}\right)^{\beta}dt\to\left(\frac{a}{\xi}\right)^{\beta}\int_{\eta}^{\infty}\phi(t)(t-\eta)^{\beta-1}e^{-\frac{a(\eta-t)}{\xi}}dt.$$

若取 $(\xi-\eta)^{1-\beta-\beta'}\int_0^{\eta}\phi(t)(\xi-t)^{\beta'-1}(\eta-t)^{\beta-1}dt$，则得

$$\left(\frac{a}{\xi}\right)^{\beta}\int_0^{\eta}\phi(t)(\eta-t)^{\beta-1}e^{-\frac{a(\eta-t)}{\xi}}dt,$$

与（4.92）右方第一式相同.

## §4. 高维空间的Darboux方程

本节考虑 $n+1$ 维空间中的Darboux方程的定解问题

$$\begin{cases}v_{rr}+\dfrac{n-1}{r}v_r-\triangle v=0,\\ v(x,0)=\psi(x_1,\cdots,x_n),\ v_r(x,0)=0.\end{cases}$$

其中 $(x_1,\cdots,x_n)\in R^{n+1}$，$\Delta v=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$ 是 Laplace 算子.

当 $n=1$ 时，就是 $\beta=\beta'=\dfrac{n-1}{2}$ 时的EPD方程.

我们的主要目的建立上述方程与 $n+1$ 维波动方程之间的关系，在同一类定解问题中寻求其内在联系.

记 $\psi(x)=\psi(x_1,\cdots,x_n)$，考虑以 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为中

心，$r$ 为半径的球面平均值

$$v(x,\ r)=\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega_r}\cdots\int\psi(x+\beta r)\,d\Omega=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega_1}\cdots\int\psi(x+\beta r)\,d\omega,\tag{4.93}$$

其中 $\beta=(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n)$ 为矢径 $\vec{r}$ 的方向余弦；$\Omega_r$ 为半径为 $r$ 的球面，即 $\sum_{i=1}^{n}y_i^2=r^2$；$\Omega_1$ 为半径为 1 的球面，即 $\sum\beta_i^2=1$；$d\Omega$ 是 $\Omega_r$ 的面积元；$d\omega$ 是单位超球面的面积元；$\omega_n$ 为 $\Omega_1$ 的面积，$\omega_n=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\pi^{\frac{n}{2}}$，$d\omega=d\beta$，$d\Omega=r^{n-1}d\omega$。我们有

**引理13** （4.93）是如下Cauchy问题的解：

$$\begin{cases}v_{rr}+\dfrac{n-1}{r}v_r-\Delta v=0\,,\\ v(x,\ 0)=\psi(x),\ v_r(x,\ 0)=0.\end{cases}\tag{4.94}$$

**证明** $\Delta v=\sum\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}=\dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_{\Omega_1}\cdots\int\Delta\psi(x+\beta r)\,d\omega,$

$$v_r=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega_1}\cdots\int\psi(x+\beta r)\,d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega_1}\cdots\int\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_i}\cdot\beta_i d\omega$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega_1}\cdots\int\sum\beta_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}d\omega$$

$$=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\Omega_r}\cdots\int\frac{\partial\psi}{\partial\nu}d\Omega_r=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{Gr}\cdots\int\Delta\psi dv.$$

其中，$\delta_i=x_i+\beta_i r$，$\frac{\partial}{\partial\nu}$是球的外法向导数，$G_r$是$\Omega_r$所围球体，$dv$为体积元素。

上式中，我们已利用了Stokes公式．此外

$$v_{rr}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{G_r}\cdots\int\Delta\psi dv\right)$$

$$=\frac{1-n}{\omega_n r^n}\int_{G_r}\cdots\int\Delta\psi dv+\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\int_{G_r}\cdots\int\Delta\psi dv$$

$$=\frac{-(n-1)}{\omega_n r^n}\int_{G_r}\cdots\int\Delta\psi dv+\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\Omega_r}\cdots\int\Delta\psi d\Omega$$

$$=-\frac{n-1}{r}v_r+\Delta v.$$

故$v(x,\ r)$满足方程。

$$v(x,\ 0)=\psi(x)\cdot\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega_1}\cdots\int d\omega=\psi(x).$$

由积分中值公式，得

$$v_r=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{Gr}\cdots\int\Delta\psi(x+\beta r)dv,$$

$$\lim_{r\to 0}v_r(x,\ r)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{G_r}\cdots\int\Delta\psi(x+\beta r)dv$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\Delta\psi(\sigma^*)\int\underset{Gr}{\cdots}\int dv$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{\Delta\psi(\sigma^*)\,0(r)}{\omega_n}=0.$$

$\sigma^*$为$G_r$球体内一点。证完。

下面我们寻求球平均函数$v(x,\ r)$与波动方程的关系。

如果我们假定函数$\psi(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\varphi(x_1)$仅依赖于一个单独变量$x_1$，且它关于$x$两次连续可微，则

$$v(x,\ r)=\frac{1}{\omega_n}\int\underset{\Omega_1}{\cdots}\int\psi(x+\beta r)d\omega$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int\underset{\Omega_r}{\cdots}\int\phi(x_1+\beta_1 r)d\omega.$$

注意到

$$\omega_n=\int\underset{\Omega_1}{\cdots}\int d\omega=\int\underset{\beta_1^2+\cdots+\beta_n^2=1}{\cdots}\int d\beta_1\cdots d\beta_n$$

$$=2\int\cdots\int_{\beta_1^2+\cdots+\beta_n^2\leqslant 1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial\beta_n}{\partial\beta_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial\beta_n}{\partial\beta_{n-1}}\right)^2}\,d\beta_1\cdots d\beta_n.$$

又$\beta_n=\sqrt{1-\beta_1^2-\cdots-\beta_{n-1}^2}$，所以$\dfrac{\partial\beta_n}{\partial\beta_i}=\dfrac{\beta_i}{\sqrt{1-\beta_1^2-\cdots-\beta_{n-1}^2}}$，

$i=1,\ \cdots,\ n-1$。于是

$$\omega_n=2\int\cdots\int_{\beta_1^2+\cdots+\beta_n^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2-\cdots-\beta_{n-1}^2}}d\beta_1\cdots d\beta_n.$$

令 $\beta_j=(1-\beta_1^2)^{\frac{1}{2}}\mu_j$, $j=2, \cdots, n-1$，则有

$$\omega_n=2\int\cdots\int_{\mu_2^2+\cdots+\mu^2_{n-1}\leqslant 1}(1-\beta_1^2)^{\frac{n-2}{2}}\Big[(1-\beta_1^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times(1-\mu_2^2-\cdots-\mu^2_{n-1})^{-\frac{1}{2}}\Big]d\mu_2\cdots d\mu_{n-1}d\beta_1$$

$$=2\int_{-1}^{1}(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta_1\int\cdots\int_{\mu^2_2+\cdots+\mu^2_{n-1}\leqslant 1}$$

$$\times(1-\mu_2^2-\cdots-\mu^2_{n-1})^{-\frac{1}{2}}d\mu_2\cdots d\mu_{n-1}$$

$$=\omega_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta_1.$$

从而 $v(x, r)=\dfrac{1}{\omega_n}\int\cdots\int_{\Omega_r}\phi(x_1+\beta_1 r)d\omega=\dfrac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$

$\times\int_{-1}^{1}\phi(x_1+\beta_1 r)\cdot(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta_1$. 将上式两边对 $x$ 求导两次，得到

$$\Delta v(x, r)=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\phi''(x_1+\beta_1 r)(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta_1.$$

因 $v(x, r)$ 满足Darboux方程，故有

$$\frac{n-1}{r}v_r+v_{rr}-\Delta v=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\phi''(x_1+\beta_1 r)(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta_1.$$

对 $v(x, r)$ 右边施行变换，得到

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} v(x, r) = \int_0^1 [\phi(x_1+\beta_1 r)+\phi(x_1-\beta_1 r)]$$

$$(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d\beta_1.$$

注意到记$\Phi(x, t)=\phi(x_1+\beta_1 t)+\phi(x_1-\beta_1 t)$满足

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad t=\beta_1 r,$$

且$\Phi(x, 0)=2\phi(x)$，$\Phi_t(x, 0)=0$，于是有

$$v(x, r)=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_0^1 2u(x_1, r\beta_1)(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d\beta_1.$$

其中$u(x_1, t)$是一维波动方程Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, \\ u(x, 0)=\phi(x), \\ u_t(x, 0)=0 \end{cases}$$

的解．将其结果推广到$n$维波动方程，我们有

**定理14** 设$u(x_1, \cdots, x_n, t)$是$n$维波动方程Canchy问题

$$\begin{cases} u_{tt}=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \\ u(x, 0)=\psi(x_1, \cdots, x_n), \\ u_t(x, 0)=0 \end{cases}$$

的解，则$n$维Darboux方程定解问题

$$\begin{cases} v_{rr}+\dfrac{n-1}{r}v_r-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}=0, \\ v(x,\ 0)=\psi(x_1,\ \cdots,\ x_n), \\ v_t(x,\ 0)=0. \end{cases}$$

的解由下式给出

$$v(x,\ r)=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta.$$

**证明** $\Delta v=\dfrac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\displaystyle\int_{-1}^{1}\Delta u(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta$

$$=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u_{tt}(x,\ r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta,$$

$$v_{rr}+\frac{n-1}{r}v_r=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\beta^2 u_{tt}(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}+\frac{n-1}{r}u_t\beta(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}\right]d\beta\right\}$$

$$=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\left\{\int_{-1}^{1}\left[-u_{tt}(1-\beta^2)^{\frac{n-1}{2}}+\frac{n-1}{r}\beta u_t(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}+u_{tt}(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}\right]d\beta\right\}$$

$$=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\left\{-\frac{1}{r}\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[u_t(x,\ r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{n-1}{2}}\right]d\beta+\int_{-1}^{1}u_{tt}(x,\ r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta\right\}$$

$$=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u_{tt}(x,\ r\beta)\ (1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta=\Delta v.$$

故$v(x,\ r)$满足Darboux方程。又

$$v(x,\ 0)=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u(x,\ 0)(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta$$

$$=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}u(x,\ 0)\int_{-1}^{1}(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta$$

$$=u(x,\ 0)=\psi(x).$$

由前面关于$\omega_n$的推理，得

$$v_r(x,\ 0)=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}\beta u_t(x,\ 0)(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta=0.$$

我们继续研究上述问题。注意到

$$\frac{1}{\omega_n}\int\cdots\int_{\Omega_1}\psi(x+\beta r)d\omega$$

$$=\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int_{-1}^{1}u(x,r\beta_1)(1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta_1.$$

利用这一关系式，我们可解定理14的逆定理，即由Darboux方程的解$v(x,\ r)$求得波动方程的解。事实上，这只须求如下积分方程

$$v(r)=\int_{-1}^{1}u(r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta.$$

由于波动方程Cauchy问题$u_t(x,\ 0)=0$及波动方程一般解的结构知，$u(x,\ t)$关于$t$是偶函数，故$v(r)=2\int_0^1 u\ (r\beta)$

$\times\ (1-\beta^2)^{\frac{n-3}{2}}d\beta$。令$r\beta=\sqrt{\sigma}$，$r=\sqrt{s}$，于是

$$v(\sqrt{s})=2\int_0^s u(\sqrt{\sigma})(s-\sigma)^{\frac{n-3}{2}}s^{\frac{2-n}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\sigma}}d\sigma,$$

$$s^{\frac{n-2}{2}}v(\sqrt{s})=\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}(s-\sigma)^{\frac{n-3}{2}}d\sigma.$$

我们反解上述方程。当$n$为奇数时，$\frac{n-1}{2}$为整数，于是

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[v(\sqrt{s})\,s^{\frac{n-2}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-3}{2}}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}(s-\sigma)^{\frac{n-3}{2}}d\sigma$$

$$=\frac{n-3}{2}\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-3}{2}}\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}(s-\sigma)^{\frac{n-5}{2}}d\sigma$$

$$=\frac{n-3}{2}\ \frac{n-5}{2}\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-5}{2}}\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}(s-\sigma)^{\frac{n-7}{2}}d\sigma$$

$$=\cdots=\left(\frac{n-3}{2}\right)!\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}d\sigma=\left(\frac{n-3}{2}\right)!\frac{u(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}.$$

于是

$$u(\sqrt{s})=\frac{1}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\sqrt{s}\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[v(\sqrt{s})\,s^{\frac{n-2}{2}}\right].$$

从而

$$u(x,\ t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left\{t^{n-2}v(x,\ t)\right\}.$$

当 $n$ 为偶数时，对下式

$$v(\sqrt{s})s^{\frac{n-2}{2}}=\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{s-\sigma}}(s-\sigma)^{\frac{n}{2}-1}d\sigma$$

两边关于 $s$ 同施行$\frac{n}{2}$次微分，得到

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n}{2}}\left\{v(\sqrt{s})s^{\frac{n-2}{2}}\right\}$$

$$=\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{s-\sigma}}(s-\sigma)^{\frac{n}{2}-1}d\sigma.$$

类似于上面的推理，可得

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n}{2}}\left\{v(\sqrt{s})s^{\frac{n-2}{2}}\right\}=\left(\frac{n-3}{2}\right)!\int_0^s\frac{u(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{s-\sigma}}d\sigma.$$

这是一个Abel积分方程，利用第二章同样技巧，可得

$$\frac{u(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$$

$$=\frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^s v(\sqrt{s})s^{\frac{n-2}{2}}(s-\sigma)^{-\frac{1}{2}}d\sigma.$$

变回原变量，得到

$$u(x,\ t)=\frac{2t}{\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^t\frac{r}{\sqrt{t-r^2}}r^{n-2}v(x,\ r)dr.$$

注　在下一章将会看到，利用分数阶微积分知识，上述结果是容易得到的。

# 第五章　分数阶积分算子

Euler-Poisson-Darboux 方程最重要的性质之一，就是不同参数的解之间存在一些递推关系，这些递推关系刻划了不同参数所对应的方程之间的内在联系。而这种特殊的属性最先由Weinstein所注意。1954年，他发现方程

$$L_\nu[u]=u_{tt}+\frac{2\nu}{t}u_t+X[u]=0. \tag{0.1}$$

其中，$X[u]$是仅与$x$有关的微分算子，系数也是仅与$x$有关而与$t$无关的函数。若以$u^\nu$记该方程的解，则有

$$u^{1-\nu}=t^{\nu-\frac{1}{2}}u^\nu, \tag{0.2}$$

和　$$u^{\nu+1}=\frac{1}{t}\frac{\partial u^\nu}{\partial t}. \tag{0.3}$$

前一个关系式就建立了正则解与奇性解之间的关系，这在第二章中已阐明。第二个关系式曾在第三章中论证，它刻划了正则解是$t$的偶函数时，不同参数所对应方程解之间的关系。Weinstein 证明了：在一定条件下，它是可以逆转的。

1954年以后，对EPD方程解的研究，应用了分数阶微积分这一工具，这是重要的一步，使对该类方程本质的揭露，推进了一个新的阶段。这方面最主要的成就归功于 A. Weinstein[62, 63]；J. L. Lions[31, 64—66]和A. Erdelyi[29, 68]。他们发现，对于以β

为参数的方程

$$D_{\beta}^{2}u\equiv\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}-\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ (\beta\in R),\tag{0.4}$$

满足如下条件

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ y)=0,\tag{0.5}$$

的解 $u(x,\ y;\ \beta)$，存在一种分数阶积分算子$H_{\alpha,\beta}$，使

$$H_{\alpha+\beta,\ \beta}D_{\beta}^{2}\equiv D^{2}{}_{\alpha+\beta}H_{\alpha+\beta,\beta},\tag{0.6}$$

即 $u(x,y,\alpha+\beta)=H_{\alpha+\beta,\beta}u(x,\ y,\beta)$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}t^{2\beta}(1-t^{2})^{\alpha-1}u(x,ty;\ \beta)dt,(\alpha>0,\ \beta>0),\tag{0.7}$$

而且（0.7）也满足（0.5）．如果注意到$\beta=0$，（0.4）就变为波动方程，则（0.6）也就建立了波动方程与EPD方程满足（0.5）的解之间的联系，从而将（0.4）、（0.5）问题转化为解波动方程的同类问题．对于混合问题和空间EPD方程也有类似结果。1965年，Erdelyi运用这类积分算子，从Laplace方程的基本解导出了EPD方程的基本解．1970年，又利用令$\beta=0$而得到的算子$I_{y^2}^{n,\alpha}$和逆算子作用于一维波动方程的“通解”，得到EPD方程解的Poisson和Volterra表达式。J. L. Lions则对$H_{\alpha,\beta}$算子的几何性质作了详细的介绍．

本章第一节介绍分数阶微积分知识，第二节从一具体问题入手，引入算子$\mathscr{B}_k$，$B_k$和$H_{\alpha,\beta}$；第三节应用上述积分算子求解EPD方程的几类定解问题；第四节建立上述两类算子与Erdelyi，Lions等其他数学家所建立的积分算子之间的关系，以及$H_{\alpha,\beta}$算子在奇异拟微分算子理论中的一些应用；第五节作为一种推广，

研究了一类广义超几何偏微分方程，以更自然和更本质的方法导出两类积分算子，应用于EPD方程，其中一类就是 $H_{\alpha,\beta}$ 算子，而同时又得到另一类 $\overline{H}_{\alpha,\beta}$ 算子。

## §1. 分数阶微积分

1.通常，我们说 $n$ 阶微商或 $n$ 重积分，$n$ 都是正整数；对于半阶，甚至是分数阶的微商或积分，似乎难以理解。其实，分数阶微积分发展的历史几乎和微积分一样漫长。早在1695年，有一个叫L'Hospital的人就问微积分的发现者之一Leibniz："什么是 $\frac{1}{2}$ 阶的微商？"

这类问题的提出并不奇怪，因为在数学上，类似的例子很多，例如指数概念，最初 $x^n$ 是指 $n$ 个 $x$ 的连乘，$n$ 只能是正整数。但后来推广到了任意实数，甚至是复数。这样就把乘方和开方统一起来了，使得运算大为方便。

我们还是回到所提出的问题，从一个特殊函数的微分开始。考虑 $y=x^n$（$n$ 为正整数），那么

$$\frac{d^m y}{dx^m}=n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}=\frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}.$$

如果 $y=x^a$（$a$ 是实数），则

$$\frac{d^m y}{dx^m}=a(a-1)\cdots(a-m+1)x^{a-m}=f(a,\ m)x^{a-m}.$$

由此，我们自然会想到

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}=c\left(a,\ \frac{1}{2}\right)x^{a-\frac{1}{2}},$$

其中$c\left(a,\frac{1}{2}\right)$是依赖于$a$和$\frac{1}{2}$的常数。如果我们能确定$c\left(a,\frac{1}{2}\right)$，使得和通常微分一致，则问题就可以解决，为此，首先就得推广“阶乘”的概念。

**定义** 如果一个函数满足$f(a+1)=af(a)$，则我们就记它为Γ（显然，这就是有名的特殊函数：Γ-函数），由定义推出

$$\Gamma(a+n)=(a+n-1)\cdots a\Gamma(a)=(a)_n\Gamma(a),$$

其中

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

从而有

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

由于

$$a(a-1)\cdots(a-n+1)=(a-m+1)_m=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)},$$

故有

$$\frac{d^m x^a}{dx^m}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m+1)}x^{a-m}.$$

继而，有

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x^a}{dx^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}x^{a-\frac{1}{2}}.$$

于是，我们就得到了特殊函数$x^a$的$\frac{1}{2}$阶微分表达式。而对于一般

的解析函数 $y = f(x)$，我们将它展为幂级数

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

因此，它的 $\alpha$ 阶导数为

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

2.上面引进的分数阶微商是很直观和自然的，但有两个弱点，一个是它与积分的联系不紧密，另一个是它依赖于函数的特殊性。一种定义是否确切，主要的一条是必须使它与函数的选取无关。然而，不管怎样，上面的讨论却给了我们一个启发：要把整数阶微商推广至任意阶，关键在于要把函数的 $n$ 阶微商用"$n$"表征出来，然后，才可以将 $n$ 推广到任意实数 $a$，故必须考虑如何用一个关于 $n$ 的函数来刻划 $n$ 重积分。

设函数 $f(x)$ 在任意区间（$a$，$b$）上可积，我们以下式定义 $f(x)$ 的一次积分 $F_1(x)$：

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

以后的积分以递推公式确定

$$F_{r+1}(x) = \int_a^x F_r(t)\,dt, \quad r = 1, 2, 3, \cdots.$$

于是有

$$F_n(x) = \int_a^x \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_1} f(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt_2 \cdots dt_{n-1}. \tag{5.1}$$

利用 $n$ 重积分的Dirichlet或Cauchy公式，有

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt. \tag{5.2}$$

类似地，若 $f(x)$ 具有适当的性质，则也可以用下式定义 $f(x)$ 的一次积分

$$F_1^*(x) = -\int_x^{\infty} f(t)dt,$$

$$F^*_{r+1}(x) = -\int_x^{-\infty} F_r^*(t)dt, \quad r = 1, 2, 3, \cdots.$$

从而，类似可得

$$F_n^*(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^{\infty}(t-x)^{n-1}f(t)dt. \qquad (5.3)$$

若我们记（5.2）为 $I^n f(x)$，即

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt, \qquad (5.4)$$

和

$$I^{*n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^{\infty}(t-x)^{n-1}f(t)dt, \qquad (5.5)$$

则由（5.4），我们就定义 $f(x)$ 的 $\alpha$ 阶 $(\alpha > 0)$ 积分为

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt. \qquad (5.6)$$

由（5.6）易见，若 $f(x)$ 可积，$\alpha$ 甚至可以是 $\mathrm{Re}\alpha > 0$ 的任意复数，则(5.6)右边的积分的收敛，故此定义是有意义的。

可以证明，以（5.6）所定义的分数阶积分具有通常积分的性质：

$$1^\circ \quad \frac{d}{dx}I^{\alpha+1}f(x) = I^\alpha f(x). \qquad (5.7)$$

事实上，

$$\frac{d}{dx}I^{\alpha+1}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha}dt$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt$$

$$=I^{\alpha}f(x).$$

一般地，有

$$\frac{d^n}{dx^n}I^{\alpha+n}f(x)=I^{\alpha}f(x). \tag{5.8}$$

2° 可加性

$$I^{\alpha}I^{\beta}f(x)=I^{\alpha+\beta}f(x). \tag{5.9}$$

**证明** 由

$$I^{\alpha}I^{\beta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\beta-1}dsdt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(x)$$

$$\times\int_s^t(x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dtds,$$

令 $t=x-(x-s)t$，则上式右边积分为

$$I^{\alpha}I^{\beta}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}$$

$$\times\int_0^1\tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}dtds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}ds$$

$$=I^{\alpha+\beta}f(x).$$

证完。

为研究分数阶积分进一步性质，我们需要将 $\alpha$ 推广至负数，即用统一的形式处理分数阶积分和分数阶微分。

设$\alpha - n > 0$，则

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt.$$

对$(x-t)^{\alpha-1}$进行分部积分，有

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{-1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\, d(x-t)^{\alpha}$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha} f(a)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x f'(t)(x-t)^{\alpha} dt$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} + I^{\alpha+1} f'(x).$$

重复上述过程$n$次，得到

$$I^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)} + I^{\alpha+n} f^{(n)}(x). \tag{5.10}$$

但是，上式右端，当$\alpha + n > 0$时有意义，因此，对任意负数$\alpha > -n$，可用（5.10）定义$\alpha$阶积分，（实际上是$-\alpha$阶微分），进一步有

3° $I^{\circ} f(x) = f(x).$ (5.11)

事实上，取$n = 1$，则

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x f'(t)(x-t)^{\alpha} dt.$$

令$\alpha \to 0$，得到

$$I^{\circ} f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(x).$$

4° $I^{-n} f(x) = f^{(n)}(x).$

**证明** 由（5.10），令$\alpha\to-n$，而$\Gamma(\alpha+k+1)$以$\alpha=-n$为极点，故（5.10）右边第一项消失，得到

$$I^{-n}f(x)=I^{0}f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x).$$ **证完。**

注意 由1°，$I^{-n}I^{n+\alpha}f(x)=I^{\alpha}f(x)$，但反之，$I^{\alpha+n}I^{-n}f(x)=I^{\alpha}f(x)$一般并不成立。

3.分数阶微积分在解积分方程，微分方程方面有许多应用，一些特殊函数也可借助于分数阶微积分而更加简练明确地表示。

*A*. Abel积分方程

设$g(x)$是已知函数，由如下方程求解$f(x)$：

$$\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt=g(x),\quad \alpha<1. \tag{5.13}$$

（5.13）称为Abel积分方程，它可以作为卷积方程的一个例，也可视为分数阶积分，一般解法是：以$\xi$代替（5.13）中的$x$，两边乘以$(x-\xi)^{\alpha-1}$且同时对$\xi$积分，得到

$$\int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1}\int_0^{\xi} f(t)(\xi-t)^{-\alpha}dtd\xi=\int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1}g(\xi)d\xi.$$

上式左端交换积分次序，有

$$\int_0^x f(t)\int_x^{\xi}(x-\xi)^{\alpha-1}(\xi-t)^{-\alpha}d\xi dt$$

$$=\int_0^t f(t)\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau dt$$

$$=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (x-\xi)^{\alpha+1}g(\xi)d\xi.$$

故有

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1}g(\xi)d\xi. \tag{5.14}$$

由上述解法容易看出：求解 $f(x)$ 的过程与上一般性质2°证明过程十分类似，换言之，若利用分数阶积分知识，可使求解过程大为简化；事实上，（5.13）可以写为

$$\Gamma(1-\alpha)I^{1-\alpha}f(x)=g(x).$$

利用性质 2°，有

$$\Gamma(1-\alpha)I^{\alpha}I^{1-\alpha}f(x)=\Gamma(1-\alpha)I^{1}f(x)=I^{\alpha}g(x).$$

从而，由 1°得到

$$\Gamma(1-\alpha)\frac{d}{dx}I^{1}f(x)=\frac{d}{dx}I^{\alpha}g(x),$$

即

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}I^{\alpha}g(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}g(t)(x-t)^{\alpha-1}dt. \tag{5.15}$$

与（5.14）一致。

*B*. 由于分数阶微积分将微分和积分统一起来，而且把问题归结为阶数“α”，这就为解微分方程提供一个简便的方法。

作为一个例子，考虑二阶常微分方程

$$\begin{cases} y''+c^{2}y=f(x), & c=\text{const},\\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases} \tag{5.16}$$

利用分数阶微积分的记号，将方程写为

$$I^{-2}y+c^{2}y=f(x),$$

或者

$$(I^{0}+c^{2}I^{2})y=I^{2}f(x).$$

因此，有

$$y(x)=\frac{I^2}{I^0+c^2I^2}f(x). \tag{5.17}$$

剩下只须求出$\frac{I^2}{I^0+c^2I^2}$的具体表达式．由

$$\frac{1}{1+c^2I^2}=\frac{1}{1-(-c^2I^2)}$$
$$=1-c^2I^2+c^4I^4-\cdots+(-c^2I^2)^n+\cdots,$$

故

$$\frac{I^2}{1+c^2I^2}=I^2-c^2I^4+c^4I^6+\cdots+(-c^2I^2)^nI^2+\cdots.$$

而

$$(-1)^nc^{2n}I^{2(n+1)}=\frac{(-1)^nc^{2n}}{(2n+1)!}\int_0^{\infty}f(t)(x-t)^{2n+1}dt, \tag{5.18}$$

这样

$$y(x)=\frac{I^2}{1+c^2I^2}f(x)$$
$$=\int_0^{\infty}f(t)(x-t)dt-\frac{c^2}{3!}\int_0^{\infty}f(t)(x-t)^3dt+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{c^{2n}}{(2n+1)!}\int_0^{\infty}f(t)(x-t)^{2n+1}dt+\cdots$$
$$=\frac{1}{c}\int_0^{\infty}f(x)\left\{c(x-t)-\frac{[c(x-t)]^3}{3!}+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^n\frac{[c(x-t)]^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right\}dt$$
$$=\frac{1}{c}\int_0^{\infty}f(t)\sin[c(x-t)]dt. \tag{5.19}$$

不难验证这确实是所求的解。

$C$. 迄今为止，我们所掌握的函数为数极少，对一类高级的超越函数，例如 Bessel 函数，超几何函数等，在应用上极其重要，对其性质的研究已很多，但一般而言，高等数学教程中还很少提到。因而，如何将这类函数以更简便的方式表示出来就是一个课题。我们将看到，Bessel 函数，超几何函数可以用初等函数的分数阶微积分表出。

$\nu$ 阶的Bessel函数

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}, \tag{5.20}$$

它是常微分方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0, \tag{5.21}$$

的解。由第一段知，若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，则

$$\frac{d^a}{dx^a}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-a+1)}x^{n-a}.$$

因此，不难看出，Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 应是某个函数的分数阶导数。事实上，这个函数就是余弦函数。

我们证明

$$2^\nu\sqrt{\pi}\,x^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(\sqrt{x})=\frac{d^{-\nu-\frac{1}{2}}}{dx^{-\nu-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right). \tag{5.22}$$

事实上

$$\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2!}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4!}x^{1+\frac{1}{2}}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{(2n)!}+\cdots.$$

所以

$$\frac{d^{-\nu-\frac{1}{2}}}{dx^{-\nu-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n)!\,\Gamma(n+\nu+1)}x^{n+\nu}.$$

注意到$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^n}$，而

$$\frac{(2n-1)!!}{2n!}=\frac{1}{(2n)!!}=\frac{1}{2^n n!},$$

从而

$$\frac{d^{-\nu-\frac{1}{2}}}{dx^{-\nu-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+\nu}}{2^{2n}n!\,\Gamma(n+\nu+1)}.$$

$$(5.23)$$

将此式与$2^\nu\sqrt{\pi}\,x^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(\sqrt{x})$比较，立得（5.22），进一步化简（5.23）左端，有

$$\frac{d^{-\nu-\frac{1}{2}}}{dx^{-\nu-\frac{1}{2}}}\left[\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]=I^{\nu+\frac{1}{2}}\left[\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\times\int_0^{\infty}(x-t)^{\nu-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{t}\,dt.$$

从而

$$J_\nu(\sqrt{x})=\frac{x^{-\frac{\nu}{2}}}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}(x-t)^{\nu-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\cos\sqrt{t}\,dt, \tag{5.24}$$

或者

$$J_\nu(x)=\frac{x^{-\nu}}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}(x^2-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos t\,dt. \tag{5.25}$$

超几何函数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=\text{const}, \tag{5.26}$$

它是方程

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{du}{dx}-\alpha\beta u=0 \tag{5.27}$$

的解。设$\gamma>\beta>0$，考虑$\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n}$，有

$$\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n}=\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}\bigg/\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}B(\beta+n,\ \gamma-\beta)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt.$$

代入超几何函数（5.26），有

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma, x)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}x^n\int_0^1 t^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(tx)^n\right]dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}x^{1-\gamma}\int_0^{x} t^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha}(x-t)^{\gamma-\beta-1}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)}x^{1-\gamma}I^{\gamma-\beta}[x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}].$$

这表明超几何函数是初等函数$x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}$的$\gamma-\beta$阶积分。

## §2. 分数阶积分算子$\beta_\beta$, $B_\beta$和$H_{\alpha+\beta,\beta}$

考虑如下定解问题

$$\begin{cases} D_\beta^2 \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{2\beta}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ u(x,\ 0)=g(x),\ \ g(-x)=g(x), \\ u_y(x,\ 0)=0. \end{cases} \tag{5.28}$$

由Poisson公式，其解由下式给出

$$u(x,\ y)=\int_0^1[\psi(x+\tau y)+\psi(x-\tau y)](1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau.$$

利用 $u(x,\ 0)=g(x)$，有

$$g(x)=2\psi(x)\int_0^1(1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\psi(x).$$

所以

$$\psi(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}g(x).$$

于是

$$u(x,\ y)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1[g(x+\tau g)+g(x-\tau y)]$$

$$(1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau. \qquad (5.29)$$

由（5.29）显知，$u_y(x,\ 0)=0$,故（5.29）确实是（5.28）的解。注意到$g(x)$是偶函数，于是

$$u(0,\ y)=\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1 g(\tau y)(1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau. \qquad (5.30)$$

但是，容易看到，$g(\tau y)$不是别的，正是如下波动方程 Cauchy

问题的解$v(x, y)$中$v(0, y)$的值，即

$$\begin{cases} v_{xx}-\tau^{-2}v_{yy}=0, \\ v(x, 0)=g(x), \quad g(-x)=g(x), \\ v_y(x, 0)=0. \end{cases} \tag{5.31}$$

事实上，(5.31) 问题的解为

$$v(x, y)=\frac{g(x+\tau y)+g(x-\tau y)}{2},$$

从而

$$v(0, y)=\frac{g(\tau y)+g(-\tau y)}{2}=g(\tau y).$$

于是由解的唯一性容易推得，若$v(x, y)$是 (5.31) 问题的解，则

$$u(x, y)=\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1 v(x,\tau y)(1-\tau^2)^{\beta-1}d\tau, \tag{5.32}$$

就是 (5.28) 的解．很快，我们要证明这一结论．

**1.定义** $$B_\beta f(x)=\frac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}f(tx)dt$$

$$(\beta>0), \tag{5.30}$$

$f(x)$是连续函数．在上式中，令$tx=y$，得到

$$\mathscr{B}_\beta f(x)=\frac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty x^{1-2\beta}(x^2-y^2)^{\beta-1}f(y)dy$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}x^{1-2\beta}\int_0^\infty (x^2-y^2)^{\beta-1}f(x)dy$$

$$\overset{\text{记}}{=}F(x).$$

(5.30) 的算子$\mathscr{B}_\beta$，称为Poisson算子。

下面我们利用分数阶微积分，形式上求其逆算子$B_\beta$。在上式中，令$x^2=\xi$，$y^2=y$，有

$$F(\sqrt{\xi})=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\xi^{\frac{1}{2}-\beta}\int_0^\xi(\xi-\eta)^{\beta-1}\frac{f(\sqrt{\eta})}{\sqrt{\eta}}d\eta$$

$$=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\xi^{\frac{1}{2}-\beta}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}I_\beta\left[\frac{f(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}\right].$$

从而 $$I^\beta\left[\frac{f(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\xi^{\beta-\frac{1}{2}}F(\sqrt{\xi}).$$

两边同时作用算子$I^{-\beta}$，有

$$\frac{f(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int_0^{\xi}(\xi-\eta)^{-\beta-1}\eta^{\beta-\frac{1}{2}}$$

$$\times F(\sqrt{\eta})d\eta.$$

再令 $\xi=\alpha^2$， $\eta=y^2$，有

$$f(x)=\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(-\beta)}x\int_0^{\infty}(x^2-y^2)^{-\beta-1}y^{2\beta}F(y)dy.$$

上述积分，当 $-1<\mathrm{Re}\beta<0$ 时收敛，于是在此条件下，我们作为$\mathscr{B}_\beta$的逆算子，定义

$$B_\beta f(x)=\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(-\beta)}x\int_0^{\infty}(x^2-y^2)^{-\beta-1}y^{2\beta}$$

$$\times f(y)dy. \tag{5.33}$$

现设 $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<0$，用 $\varepsilon^m(x\geqslant 0)$ 记在 $x\geqslant 0$ 上 $m$ 次连续可微函数空间并赋予通常的拓朴结构，对 $f\in\varepsilon^0(x\geqslant 0)$，我们令

$$B_\beta f(x)=b_\beta x\int_0^{\infty}(x^2-y^2)^{-\beta-1}y^{2\beta}f(y)dy, \tag{5.33$'$}$$

其中 $b_\beta=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(-\beta)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{-1}$. 则显见 $B_\beta f(0)=f(0)$.

又记$F^2$为$\varepsilon^2(x\geqslant 0)$中满足条件 $f'(0)=0$ 的函数所成的空间，则对$\mathscr{B}_\beta$算子，有：

**命题1.** 设$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<0$，对于任何$f\in F^2$,有$B_\beta f\in F^2$，由$F^2$到自身的运算$f\to B_\beta f$是连续的，对任何$f\in F^2$，有关系式

$$D^2B_\beta f=B_\beta L_\beta f, \tag{5.34}$$

其中$D=\frac{\partial}{\partial x}$，而$L_\beta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\beta}{x}\frac{\partial}{\partial x}$。

**证明** 在（5.33）中令$y=tx$，得到

$$B_\beta f(x)=b_\beta\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta-1}f(tx)dt. \tag{5.35}$$

于是，$DB_\beta f(x)=b_\beta\int_0^1 t^{2\beta+1}(1-t^2)^{-\beta-1}f'(tx)dt$。

这表明$(B_\beta f)'$连续，且

$(B_\beta f)'(0)=cf'(0)=0$ （$\because f\in F^2$）。

其次，有

$$D^2B_\beta f(x)=b_\beta\int_0^1 t^{2\beta+2}(1-t^2)^{-\beta-1}f''(x)dt.$$

$\because\ f''\in\varepsilon^\circ$，$\therefore(B_\beta f)''\in\varepsilon^\circ$，$\therefore B_\beta f\in F^2$。

由$\varepsilon^\circ(x\geqslant 0)$到自身运算$f\to Bf$的连续性与由$F^2$到$F^2$自身的连续性是显然的。

最后证明（5.34）：

$$B_\beta L_\beta f(x)=b_\beta\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta-1}\left[f''(tx)+\frac{2\beta}{tx}f'(tx)\right]dt.$$

考虑

$$X_\beta=\frac{1}{b_\beta}[B_\beta L_\beta f(x)-D^2B_\beta f(x)]$$

$$=\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta-1}\left[(1-t^2)f''(tx)+\frac{2\beta}{tx}f'(tx)\right]dt$$

$$=\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta}f''(tx)dt+$$

$$2\beta\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta-1}\frac{f'(tx)}{tx}dt.$$

利用分部积分处理右边第一式，注意到$f'(0)=0$，有

$$\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta}f''(tx)dt$$

$$=-\int_0^1\frac{f'(tx)}{x}\frac{d}{dt}(t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta})$$

$$=-2\beta\int_0^1\frac{f'(tx)}{tx}t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta-1}dt.$$

从而$X_\beta=0$。　　证完

注　我们定义算子$\overline{B}_\beta$(Sonine算子)

$$\overline{B}_\beta f(x)=\overline{b}_\beta\int_0^\infty y^{2\beta}(x^2-y^2)^{-\beta}f(y)dy, \tag{5.36}$$

其中$\overline{b}_\beta=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(-\beta+1)}$。令$tx=y$，得

$$\overline{B}_\beta f(x)=\overline{b}_\beta\ x\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta}f(tx)dt. \tag{5.36$'$}$$

当$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<1$时收敛。$\overline{B}_\beta f(0)=0$，如果设$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<0$，

则可对（5.36）求导，得到

$$\frac{d}{dx}\overline{B}_\beta f(x) = -2\beta\bar{b}_\beta x\int_0^\infty y^{2\beta}(x^2-y^2)^{-\beta-1}f(y)dy.$$

与（5.33）对比，有

$$\frac{d}{dx}\overline{B}_\beta f(x) = B_\beta f(x),\quad \forall f\in \varepsilon^\circ (x\geqslant 0).$$

所以，在一定条件下，$B_\beta$算子是Sonine算子的一阶导数。

对$\mathscr{B}_\beta$算子，我们有如下类似结果。

**命题2** 设$\mathrm{Re}\beta>0$，如果$f\in F^2$，则$\mathscr{B}_\beta f\in F^2$，由$F^2$到自身的运算$f\to\mathscr{B}_\beta f$是连续的，对于任意的$f\in F^2$，我们有

$$\mathscr{B}_\beta D^2 f = L_\beta \mathscr{B}_\beta f. \tag{5.37}$$

**证明** 由（5.30），得

$$(\mathscr{B}_\beta f)''(x) = \frac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\beta-1}f''(tx)dt.$$

所以，$\mathscr{B}_\beta f\in F^2$，且$f\to\mathscr{B}_\beta f$是连续的，令

$$X_\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}(L_\beta\mathscr{B}_\beta f - \mathscr{B}_\beta D^2 f)$$

$$= -\int_0^1(1-t^2)^\beta f''(tx)dt + 2\beta\int_0^1 tx^{-1}(1-t^2)^{\beta-1}f'(tx)dt.$$

对右边第一积分进行分部积分，由于$f'(0)=0$，$\mathrm{Re}\beta>0$，得到

$$\int_0^1 f'(tx)\frac{1}{x}\frac{d}{dt}(1-t^2)^\beta dt.$$

由此得$X_\beta\equiv 0$. 证完

**2. $B_\beta$与$\mathscr{B}_\beta$之间的关系**

本段我们假设$0<\mathrm{Re}\beta<1$，于是$\overline{B}_\beta$与$\mathscr{B}_\beta$均有定义.

**命题3** 若$0<\mathrm{Re}\beta<1$，则对任意的$f\in\varepsilon^\circ(x\geqslant 0)$，我们有

$$\overline{B}_\beta\mathscr{B}_\beta f(x)=\int_0^\infty f(y)dy. \tag{5.38}$$

**证明** $$\overline{B}_\beta\mathscr{B}_\beta f(x)=\overline{B}_\beta\frac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}f(tx\tau)d\tau dt$$

$$=\frac{2}{\Gamma(-\beta+1)\Gamma(\beta)}x\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}$$
$$\times f(tx\tau)d\tau dt.$$

令$t\tau=\eta$，上式

$$\overline{B}_\beta\mathscr{B}_\beta f(x)=\frac{2}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}x\int_0^1 f(\eta x)d\eta$$
$$\times\int_\eta^1 t(1-t^2)^{-\beta}(t^2-\eta^2)^{\beta-1}dt.$$

令$t^2=\eta^2-(\eta^2-1)\tau^2$，得

$$上式=\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}x\int_0^1 f(\eta x)d\eta\int_0^1(1-\eta^2)^{-\beta}$$
$$\times(1-\tau^2)^{-\beta}(1-\eta^2)^{\beta-1}\tau^{2\beta-2}(1-\eta^2)d\tau^2$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}x\int_0^1 f(\eta x)d\eta\int_0^1 (1-\tau^2)^{-\beta}\tau^{2\beta-1}d\tau.$$

令$\tau^2=t^2$，$\eta x=\tau$，得到

$$\overline{B_\beta}\mathscr{B}_\beta f(x)=\int_0^\infty f(\tau)d\tau. \qquad \text{证完}$$

**推论** 在命题 3 假设下，对一切$f\in\varepsilon^\circ(x\geqslant 0)$，均有

$$(D\overline{B_\beta})\mathscr{B}_\beta f=f. \tag{5.38}'$$

类似地有

**命题 4** 设$0<\mathrm{Re}\beta<1$，对任意的$f\in\varepsilon'(x\geqslant 0)$，有

$$\mathscr{B}_\beta(D\overline{B_\beta}f)=f. \tag{5.39}$$

由于$\mathscr{B}_\beta$和$B_\beta$关于$\beta$的限制，对于使$\mathscr{B}_\beta f$和$B_\beta f$收敛的$\beta$的值之间没有共同区间，因此要证明$\mathscr{B}_\beta B_\beta=B_\beta\mathscr{B}_\beta=1$，尚须对$\mathscr{B}_\beta$和$B_\beta$进行解析延拓，我们通过如下方法进行。

先设$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<0$，对$\varepsilon$中任意函数$f$，利用

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^{2\beta-\lambda-1}}{(1-t^2)^{\beta-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}}\right)=(2\beta-\lambda-1)\frac{t^{2\beta-\lambda-2}}{(1-t^2)^{\beta-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}}}, \tag{5.40}$$

在$B_\beta f(x)=b_\beta\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta-1}f(tx)dt$中，对$t^{2\beta}(1-t^2)^{-\beta-1}$分部积分，分别依次取$\lambda=-1, 1, 3, \cdots, 2n-3$。重复进行$n$次，即得

$$B_\beta f(x)=(-1)^n\frac{b_\beta}{2\beta(2\beta-2)(2\beta-4)\cdots[2\beta-(2n-2)]}$$

$$\times\int_0^1 \frac{t^{2\beta-(2n-2)}}{(1-t^2)^{\beta-\frac{2n-2}{2}}} T_n f(tx)dt. \tag{5.41}$$

其中$T_n$由下式递推定义

$$\begin{cases} T_1 f(t, x) = \dfrac{\partial}{\partial t}(tf(t, x)), \\ T_2 f(t, x) = \dfrac{\partial}{\partial t}(t^3 T_1 f(t, x)), \\ \cdots\cdots \\ T_n f(t, x) = \dfrac{\partial}{\partial t}(t^3 T_{n-1} f(t, x)). \end{cases}$$

而由（5.41）易见，对$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<n$的一切$\beta$积分均收敛，而且，（5.41）始终有意义，这样$\beta$可向右延拓至任何区域。

又若在(5.40)中分别令$2\beta+n=2\beta-\lambda-2$，先取$n$分别等于$0, 1, 2, \cdots$，再解出$\lambda=-2, -3, \cdots, -(n+1)$，重复在$B_\beta f(x)$中进行分部积分$n$次，又得到

$$B_\beta f(x) = \frac{(-1)^{n-1} b_\beta}{(2\beta+1)(2\beta+2)\cdots(2\beta+n-1)} \times\int_0^1 \frac{t^{2\beta+n-1}}{(1-t^2)^{\beta+\frac{n-1}{2}}} u_{n-1} f(tx)dt. \tag{5.42}$$

其中$u_n f$由下式递推定义

$$\begin{cases} u_1 f(t, x) = \dfrac{\partial}{\partial t}((1-t^2)^{\frac{1}{2}} f(t, x)), \\ u_2 f(t, x) = \dfrac{\partial}{\partial t}((1-t^2)^{\frac{3}{2}} u f(t, x)), \\ \cdots\cdots \\ u_n f(t, x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\cdots\left((1-t^2)^{\frac{3}{2}} u_{n-1} f(t,x)\right). \end{cases} \tag{5.43}$$

对（5.42），当$-\frac{n+1}{2}<\mathrm{Re}\beta<0$，只要$\beta\neq-1,\ -2,\ \cdots$，则（5.42）是收敛的，结合(5.41)和（5.42），对$B_\beta$我们将其延拓至整个平面．特别，当$\beta=0$时，由于$b_\beta=\dfrac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(-\beta)}$，

而$-\beta\Gamma(-\beta)\to1$（$\beta>0$），取（5.41）得

$$B_0f(x)=-\frac{b\beta}{2\beta}\int_0^1\frac{x^{2\beta}}{(1-t^2)^\beta}\frac{\partial}{\partial t}(tf(tx))dt$$

$$=\bar{b}_\beta\int_0^1\frac{t^{2\beta}}{(1-t^2)^\beta}\frac{\partial}{\partial t}(xf(tx))dt$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{b}_\beta\,\alpha\int_0^1\frac{t^{2\beta}}{(1-t^2)^\beta}f(tx)dt\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\bar{B}_\beta f(x).\quad（见（5.36）'）$$

证完

现在可以证明本节最初所提的问题．

**定理1**　设$u(x,\ y)$是波动方程Cauchy问题

$$\begin{cases}u_{xx}-u_{yy}=0,\\ u(x,\ 0)=f(x),\\ u_y(x,\ 0)=0,\end{cases}\tag{5.44}$$

的解，则对于$\beta>0$，

$$\mathscr{B}_\beta u(x,\ y)=C_\beta\int_0^1u(x,\ ty)(1-t^2)^{\beta-1}dt,\tag{5.46}$$

其中 $C_\beta=\dfrac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}$，就是如下Cauchy问题

$$\begin{cases}u_{xx}-u_{yy}-\dfrac{2\beta}{y}u_y=0,\\ u(x,\ 0)=f(x),\\ u_y(x,\ 0)=0.\end{cases}\tag{5.47}$$

的解。

**证明** 令$v(x,\ y)=\mathscr{B}_\beta u(x,\ y)$，则

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-t^2)^{\beta-1}dt,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=C_\beta\int_0^1\frac{\partial u}{\partial z}t\cdot(1-t^2)^{\beta-1}dt,\quad z=ty,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}t^2(1-t^2)^{\beta-1}dt$$

$$=C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(1-t^2)^{\beta-1}dt-C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(1-t^2)^{\beta}dt$$

$$=C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(1-t^2)^{\beta-1}dt-C_\beta\cdot\frac{1}{y}\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\times(1-t^2)^{\beta}dt.$$

对后一式分部积分且利用条件（5.44），有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(1-t^2)^{\beta-1}dt-C_\beta\frac{2\beta}{y}\int_0^1\frac{\partial u}{\partial z}t(1-t^2)^{\beta-1}dt.$$

于是

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-t^2)^{\beta-1}dt-C_\beta\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(1-t^2)^{\beta-1}dt$$

$$+C_\beta\frac{2\beta}{y}\int_0^1\frac{\partial u}{\partial z}\ t\ (1-t^2)^{\beta-1}dt$$

$$-C_\beta\frac{2\beta}{y}\int_0^1\frac{\partial u}{\partial z}\ t\ (1-t^2)^{\beta-1}dt\equiv 0.$$

再验证条件（5.47），

$$v(x,\ 0)=\mathscr{B}_\beta u(x,\ 0)=C_\beta\int_0^1 u(x,ty)(1-t^2)^{\beta-1}dt\Big|_{y=0}$$

$$=C_\beta f(x)\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}dt=f(x),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=C_\beta\int_0^1\frac{\partial u}{\partial z}\ t\ (1-t^2)^{\beta-1}dt$$

（由条件（5.44））. 证完

3. $H_{\alpha,\beta}$算子

由（5.37），我们有，对$f\in F^2$，有

$\mathscr{B}_\beta D^2\equiv L_\beta\mathscr{B}_\beta$.

再利用命题5，有

$D^2=B_\beta L_\beta\mathscr{B}_\beta$, 其中$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<1$.

设$\beta'$是$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta'<1$的另一数，则又有

$D^2=B_{\beta'}L_{\beta'}\mathscr{B}_{\beta'}$.

结合以上两式，有

$$B_\beta L_\beta \mathscr{B}_\beta = B_{\beta'} L_{\beta'} \mathscr{B}_{\beta'}.$$

因而

$$L_{\beta'} \equiv \mathscr{B}_{\beta'} B_\beta L_\beta \mathscr{B}_\beta B_{\beta'}. \qquad (5.48)$$

我们记 $B_{\beta,\beta'} = \mathscr{B}_{\beta'} B_\beta$，于是由 $\mathscr{B}_{\beta'} B_\beta = (\mathscr{B}_\beta B_{\beta'})^{-1}$，(5.48) 变为$L_{\beta'} \equiv B_{\beta,\beta'} L_\beta (B_{\beta,\beta'})^{-1}$。我们记 $H_{\beta,\beta'} = B_{\beta,\beta'}$，于是

$$L_{\beta'} H_{\beta,\beta'} = H_{\beta,\beta'} L_\beta. \qquad (5.48)'$$

下面具体算出$H_{\beta,\beta'}$：

$$H_{\beta,\beta'} f(x) = B_{\beta,\beta'} f(x)$$

$$= C_{\beta'} b_\beta x^{1-2\beta'} \int_0^\infty (x^2 - y^2)^{\beta'-1} y dy$$

$$\times \int_0^y t^{2\beta} (y^2 - t^2)^{-\beta-1} f(t) dt. \qquad (5.49)$$

此时，假设$-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\beta < 0$，$\mathrm{Re}\beta' > 0$，对 (5.49) 交换积分次序，得到

$$\int_0^\infty t^{2\beta} f(t)\, dt \int_t^\infty \frac{y (x^2 - y^2)^{\beta'-1}}{(y^2 - t^2)^{\beta+1}} dy.$$

在上式关于 $y$ 积分中，得到令 $s = \frac{y^2 - t^2}{x^2 - t^2}$，

$$\frac{1}{2}(x - t^2)^{\beta'-\beta-1} \int_0^1 (1 - s)^{\beta'-1} s^{-(\beta+1)} ds.$$

将此式代入上式，注意到$C_{\beta'}$和$b_\beta$，得到

$$H_{\beta,\beta'} f(x) = \frac{2\Gamma\left(\beta' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta' - \beta)} x^{1-2\beta} \int_0^\infty (x^2 - t^2)^{\beta'-\beta-1}$$

$$\times t^{2\beta} f(t)dt$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\beta'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta'-\beta)}\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{\beta'-\beta-1}f(tx)dt. \tag{5.50}$$

(5.50) 对$\mathrm{Re}\beta>-\frac{1}{2}$，$\mathrm{Re}(\beta-\beta')>0$ 时均有意义。

**定理 2** 设 $\mathrm{Re}\beta>-\frac{1}{2}$，$\mathrm{Re}\beta'>\mathrm{Re}\beta$，则若 $u(x, y)$是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{2\beta}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\\ u(x, 0)=f(x),\\ u_y(x, 0)=0.\end{cases} \tag{5.51}$$

的$C^2$—类解，则 $v(x, y)$

$$=H_{\beta,\beta'}u(x, y)$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\beta'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta'-\beta)}\int_0^1 t^{2\beta}(1-t^2)^{\beta'-\beta-1}u(x,ty)dt. \tag{5.50$'$}$$

就是如下问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\dfrac{2\beta'}{y}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ v(x, 0)=f(x),\\ v_y(x, 0)=0,\end{cases} \tag{5.52}$$

的$C^2$一类解。

**证明** 由(5.51)可知，$u(x, y)$关于$y\in F^2$，于是，(5.48)′成立，即

$$L_{\beta'}H_{\beta,\beta'}u\equiv H_{\beta,\beta'}L_{\beta}u.$$

再由$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$与$H_{\beta,\beta'}$可交换性，于是在上式中两边同时作用这一算子，有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{\beta,\beta'}u-L_{\beta'}H_{\beta,\beta'}u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{\beta,\beta'}u-H_{\beta,\beta'}L_{\beta}u,$$

即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-L_{\beta'}\right)H_{\beta,\beta'}u=H_{\beta,\beta'}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-L_{\beta}\right)u.$$

从而，若$u(x, y)$满足$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-L_{\beta}\right)u=0$，则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-L_{\beta'}\right)H_{\beta,\beta'}u=0.$$

即$v=H_{\beta,\beta'}u$满足(5.52)方程。至于Cauchy条件，则易于验证。 证毕。

**推论** 设$2\beta>n-1$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{2\beta}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\triangle u=0,\\ u(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\\ u_y(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0)=0,\end{cases}$$

的解为

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = H_{\frac{n-1}{2}, \beta} v(x, y)$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^y y^{1-2\beta}(y^2-s^2)^{\beta-\frac{n+1}{2}} s^{n-1} ds$$

$$\times \int_{|\alpha|=1} f(x+\alpha s) dw_n(\alpha)$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{n-1}{2}\right) w_n} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\rho-\frac{n+1}{2}} \rho^{n-1} d\rho$$

$$\times \int_{|\alpha|=1} f(x+\alpha\rho y) dw_n(\alpha).$$

其中$w_n = \dfrac{2(\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$为 $n$ 维单位超球面面积， $dw_n(\alpha)$ 是此球的面积元素.

证明由第四章第四节及定理 2 立得.

## §3. 分数阶积分算子的应用

本节将$B_\beta$、$\mathscr{B}_\beta$，$H_{\beta,\beta'}$应用于椭圆、双曲和抛物型奇异偏微分方程的一类定解问题. 直接从 Laplace 方程、波动方程和热传导方程对应问题的解出发，利用算子求出奇性偏微分方程对应问题的解. （[68]等）

1. 椭圆EPD方程

考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{5.53}$$

a）在第三章中，我们曾求出其轴对称位势，即关于$y$是偶函数的解，换言之，求如下问题的解

$$\begin{cases}(5.53), \\ u(x,\ 0)=h(x),\quad h(x)\in C^2, \\ u_y(x,\ 0)=0.\end{cases} \tag{5.54}$$

回忆$\mathscr{B}_\beta$算子，我们只须求出 Laplace 方程同类问题的解。而易知，二维 Laplace 方程轴对称位势$v(x,\ y)$为：

$$v(x,\ y)=\frac{1}{2}[h(x+iy)+h(x-iy)].$$

于是

$$u(x,y,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}[h(x+ity)+h(x-ity)]dt.$$

如果注意到常数的差异，有

$$u(x,y,\beta)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}\times[h(x+ity)+h(x-ity)]dt. \tag{5.55}$$

从而

$$u(x,\ 0)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{2h(x)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}dt=h(x).$$

而 $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0)=0$ 及（5.55），满足(5.53)是易于验证的。

若令 $t=\cos\theta$，（5.55）变为

$$u(x,y,\beta)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\beta-1}\theta[h(x+iy\cos\theta)$$

$$+h(x-iy\cos\theta)]d\theta.$$

对$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\beta-1}\theta h(x-iy\cos\theta)d\theta$，令$\theta=\pi-\theta_1$，再以$\theta$代$\theta_1$，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\beta-1}\theta h(x-iy\cos\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2\beta-1}\theta h(x+iy\cos\theta)d\theta.$$

于是

$$u(x,y,\beta)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\sin^{2\beta-1}\theta h(x+iy\cos\theta)d\theta,$$

$$\mathrm{Re}\beta>0. \tag{5.56}$$

Tricomi曾指出，（5.53）的基本解当$y=0$时，取值$[(x-x_0)^2+y_0^2]^{-\beta}$，应用（5.56）式，立得（5.53）的基本解为

$$u(x, y, \beta)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\sin^{2\beta-1}\theta[(x-x_0$$

$$+iy\cos\theta)^2+y_0^2]^{-\beta}d\theta.$$

再令

$$\cos\theta=\frac{y_0+i(x-x_0)\cos\varphi+y}{y_0+i(x-x_0)+y\cos\varphi},$$

则有

$$u(x, y, \beta)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi}{[(x-x_0)^2+y^2+y_0{}^2+2yy_0\cos\varphi]^{\beta}}. \qquad (5.57)$$

此时与第三章中利用轴对称法得到的基本解一致。

$b$）混合边值问题

考虑

$$\begin{cases} (5.53), \quad x\geqslant x_0, \\ u(x_0, \ y)=f(y), \quad 0<y<a, \quad x=x_0, \\ \dfrac{\partial u(x_0, \ y)}{\partial x}=g(y), \quad a<y<\infty, \quad x=x_0. \end{cases} \qquad (5.58)$$

$f(y)$，$g(y)$均是$y$的偶函数。

为解此问题，我们首先设法将其化为一般的边值问题。由

$B_\beta$算子，有（相差一个常数因子）

$$v(x,\ y)=B_\beta u(x,\ y)$$

$$=\frac{2}{\Gamma(-\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{-\beta-1}t^{2\beta}u(x,y,t,\beta)dt, \tag{5.59}$$

其中$v(x,\ y)$满足Laplace方程。

对于在半空间$x\geqslant x_0$，$0\leqslant y<\infty$连续的对称势，我们可以利用“径向值”$u(x_0,\ y)$来表示$u(x,\ 0)$，其中$x_0$固定，$y>0$，对于有界的偶调和函数，由二维调和方程对应Dirichlet问题的解，可以导出：

$$v(x,\ 0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{(x-x_0)v(x_0,\ y)}{y^2+(x-x_0)^2}dy,\quad x>x_0.$$

又由$u(x,\ 0)=\mathscr{B}_\beta v(x,\ 0)=v(x,\ 0)$，从（5.59）不难看出：若$u$有界，则$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<0$时，$v(x,\ y)$也有界，从而由上式及（5.59），有

$$u(x,0)=v(x,0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{(x-x_0)v(x_0,\ y)}{y^2+(x-x_0)^2}dy$$

$$=\frac{4(x-x_0)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Gamma(-\beta)}\int_0^\infty\int_0^t\frac{t(t^2-s^2)^{-\beta-1}}{(x-x_0)^2+t^2}s^{2\beta}u(x_0,\ s)dsdt$$

$$=\frac{4(x-x_0)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(-\beta)}\int_0^\infty dt\int_0^t\frac{ts^{2\beta}(t^2-s^2)^{-\beta-1}}{(x-x_0)^2+t^2}$$

$$\times u(x_0,\ s)ds.$$

交换积分次序，且因为

$$2\int_{s}^{\infty}\frac{t(t^2-s^2)^{-\beta-1}}{t^2+(x-x_0)^2}dt$$

$$=\Gamma(-\beta)\Gamma(\beta+1)[s^2+(x-x_0)^2]^{-\beta-1},$$

当$-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\beta<0$时，对于$x\geqslant x_0$，有

$$u(x,\ 0)=\frac{2(x-x_0)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}s^{2\beta}[s^2+(x-x_0)^2]^{-\beta-1}$$

$$\times u(x_0,\ s)ds. \tag{5.60}$$

不难将$\mathrm{Re}\beta$延拓到$\mathrm{Re}\beta>0$的情形，此时，两边同时对$x$积分，得

$$\int_{x}^{\infty}u(t,\ 0)dt=\frac{2\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\int_{x}^{\infty}\Big\{(t-x)$$

$$\times\int_0^{\infty}s^{2\beta}(s^2+(t-x)^2)^{-\beta-1}u(x,\ s)ds\Big\}dt,\qquad x\geqslant x_0.$$

再交换积分次序，且因为

$$2\int_{x}^{\infty}(t-x)[s^2+(t-x)^2]^{-\beta-1}dt=\frac{1}{\beta}s^{2\beta},$$

我们得到

$$\int_{x}^{\infty}u(t,\ 0)dt=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\int_0^{\infty}u(x,\ s)ds. \tag{5.61}$$

如果加强对初始条件的限制，使得$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}$有界，且$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}$

在$(x_0, \infty)$可积，从而$x\to\infty$时，$u(x, 0)\to 0$，这样：

$$-u(x, 0)=\int_x^{\infty}\frac{\partial u(t, 0)}{\partial t}dt.$$

且由（5.61）得到

$$u(x, 0)=-\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\int_0^{\infty}\frac{\partial u(x, s)}{\partial x}ds. \tag{5.62}$$

有了（5.62），即可解决（5.58）了．事实上，我们考虑$2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)$时的情形，且设对应的解为$w(x, y)$，则

$$u(x, 0)=H_{\beta-\frac{1}{2}, \beta}w(x, 0)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}w(x, 0).$$

此外，若$\frac{\partial u}{\partial x}$是$2\beta$维对称势，则

$$w_1(x, y)=-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_y^{\infty}t(t^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dt$$

也是$2\left(\beta-\frac{1}{2}\right)$维对称势，只要$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$当$t\to\infty$时有适当的性质，使得积分存在．从而

$$w_1(x, 0)=-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}dt.$$

但是由（5.62）知

$$w(x,\ 0)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)}\left(-\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\partial u(x,\ s)}{\partial x}ds=-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{\partial u(x,\ s)}{\partial x}ds=w_1(x,0).$$

又轴值唯一确定对称势，故有$w_1(x,\ y)=w(x,\ y)$，从而我们令

$$\begin{cases} w(x_0,\ y)=H_{\beta,\ \beta-\frac{1}{2}}f(y), & 0<y<a,\quad x=x_0, \\ w(x_0,\ y)=-\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\int_y^\infty t(t^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}g(t)dt, & \end{cases}$$

$$a<y<\infty,\quad x=x_0.$$

这就成为一般的边值问题了，它有显式解，再由$u=H_{\beta-\frac{1}{2},\beta}$ $w(x,\ y)$即得原混合问题的解。

如果我们要求“奇性势”

$$\begin{cases} (5.53), \\ u(x,\ 0)=0,\quad y^{2\beta}u_y(x,\ y)|_{y=0}=f(x), \end{cases}\tag{5.63}$$

则可利用$\overline{H}_{0,\beta}$算子（见第四节），化为Laplace方程同类问题的解，从而可求出（5.63）的解。

**2.双曲型EPD方程**[31, 62—66]

本段，我们考虑如下方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{5.64}$$

解决以下几个问题：

1）第一章，我们曾导出双曲型方程解的 Poisson 表达式和 Valterra 表达式，本段，我们利用 $H_{0,\beta}$ 算子（注意：$H_{0,\beta}=\mathscr{B}_\beta$）和变型的$H_{0,\beta}$算子，从波动方程解的一般表达式直接导出它们。

2）（5.64）解的Riemann表达式，可通过 $H_{0,\beta}$ 算子作用于波动方程Cauchy问题的解而得到。

3）（5.64）正则Cauchy问题的解，利用$H_{0,\beta}$ 算子，可以从波动方程对应Cauchy问题的解而得到。

4）$H_{0,\beta}$可用来研究混合问题。

5）$H_{0,\beta}$可用来研究Калилевцч方程。

除了3）已在第二节中以定理6的形式作了证明以外，其余部分，我们逐个叙述。

为方便和统一计，我们均用 $u(x, y)$ 表示（5.64）对应问题的解，而且 $v(x, y)$ 表示波动方程同一类问题的解。且 $H_{\beta,\beta'}f=\frac{2}{\Gamma(\beta-\beta')}\int_0^\infty x^{1-2\beta'}(x^2-t^2)^{\beta'-\beta-1}t^{2\beta}f(t)dt$ 与第二节中$H_{\beta,\beta'}$相差一常因子，这不影响主要结果。

1）由于对应波动方程的解一般表达式为：

$v(x, y)=f(x+y)+g(x-y)$.

而在$H_{0,\beta}$算子的要求下，有$v_y(x, 0)=0$，从而$f'(x)-g'(x)=0$，为此，我们取$2v(x, y)=f(x+y)+f(x-y)$，于是

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}[f(x+yt)+f(x-yt)]dt$$

$$=\frac{y^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)}\int_{x-y}^{x+y}[y^2-(s-x)^2]^{\beta-1}f(s)]ds. \qquad (5.65)$$

(5.65) 不表示 (5.64) 的通解，但它表示 $y\geqslant 0$, $-\infty<x<\infty$ 且满足条件 $\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial g}=0$ 的任何两次连续可微解，所以，它可以作为 $y$ 的偶函数进行延拓，这样的延拓仍是一个解.

假如我们已假设 $0<\beta<1$，所以同样有 $1-\beta>0$，由第一章Weinstein循环式，得

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{x-y}^{x+y}[y^2-(s-x)^2]^{-\beta}g(s)ds. \qquad (5.66)$$

同样是一个解.

在 (5.65)、(5.66) 中取变换: $s=x+yt$，得到

$$u_1(x,\ y)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\beta-1}g(x+yt)dt, \qquad (5.65)'$$

$$u_2(x,\ y)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}y^{1-2\beta}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\beta}g(x+yt)dt, \qquad (5.66)'$$

这正是第一章的Poisson公式.

其次，设 $v(x,\ y)$ 是 $y>0$，$-\infty<x<\infty$ 的两次连续可微解，满足

$$y^{2\beta}\frac{\partial v}{\partial y}\to 0\ (y\to 0),$$

$y^{2\beta-2}u$ 和 $y^{2\beta-1}\frac{\partial v}{\partial y}$ 在 $y=\infty$ 处可积，则将 $H_{0,\beta}$ 的积分限取作

从$y$到$\infty$,不难证明，在$L_\beta$与波方程的同类解之间仍有传递性，此时，我们有

$$u(x,\ y)=\frac{2}{\Gamma(\beta)}y^{1-2\beta}\int_y^\infty (s^2-y^2)^{\beta-1}v(x,\ s)ds$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\beta)}\int_1^\infty (s^2-1)^{\beta-1}v(x,\ sy)ds, \qquad (5.67)$$

是（5.64）的一个解，再次利用波动方程解的一般表达式，但现在于$f$和$g$独立，我们得到其形式解为

$$u(x,\ y)=\frac{y^{1-2\beta}}{\Gamma(\beta)}\left\{\int_{x+y}^\infty [(s-x)^2-y^2]^{\beta-1}f(s)ds\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{x-y}[(s-x)^2-y^2]^{\beta-1}g(s)ds\right\}. \qquad (5.68)$$

其中$f$和$g$是两次连续可微函数，满足

$$s^{2\beta}f'(s)\to 0 \text{ 当 } s\to\infty; \ |s|^{2\beta}g'(s)\to 0 \text{ 当 } s\to\infty.$$

而$s^{2\beta-2}f(s)$和$s^{2\beta-1}f'(s)$在$\infty$处可积，$|s|^{2\beta-2}g(s)$和$|s|^{2\beta-1}g'(s)$在$-\infty$处可积。

经过与刚才类似的变换，（5.68）就是（5.64）的 Volterra 表达式，而如$0<\beta<1$，又可得到另一解的Volterra 表达式。

利用上述变型的$H_{\alpha,\beta}$，我们又可将（5.68）变为$\alpha+\beta$时的方程的Volterra解，事实上，以（5.68）第一式为例，引入变换$x-s=t$，得

$$u(x,\ y,\ \beta)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}y^{1-2\beta}\int_y^\infty (t^2-y^2)^{\beta-1}f(x-t)\,dt.$$

于是$u(x,y,\alpha+\beta)=H^*_{\beta,\alpha+\beta}u(x,y,\beta)$，其中$H^*_{\beta,\alpha+\beta}$表示$H_{\beta,\alpha+\beta}$中积分限是从$y$到$\infty$，而形成的分数阶积分算子。

由刚才的说明知，在一定的条件之下，对此积分算子，算子等式（5.48）′同样成立。

我们计算 $u(x, y, \alpha+\beta)$，有

$$u(x,y,\alpha+\beta)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}y^{1-2\alpha-2\beta}\int_y^\infty (t^2-y^2)^{\alpha-1}t^{2\beta}u(x,t,\beta)dt$$

$$=\frac{2y^{1-2\alpha-2\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_y^\infty (t^2-y^2)^{\alpha-1}t\int_t^\infty f(x-\tau)\ (\tau^2-t^2)^{\beta-1}d\tau dt.$$

交换积分次序，有

$$上式=\frac{2y^{1-2\alpha-2\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_y^\infty f\ (x-\tau)d\tau\int_y^\tau t(t^2-y^2)^{\alpha-1}$$

$$\times(\tau^2-t^2)^{\beta-1}dt$$

$$=\frac{y^{1-2\alpha-2\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_y^\infty f(x-\tau)(\tau^2-y^2)^{\alpha+\beta-1}dt.$$

这正是参数为 $\alpha+\beta$ 时（5.64）的Volterra形式解。

2）如果我是将（5.65）中的函数 $f$ 与 $u$ 的初始值联系起来，我们就得到 $u$ 的Riemann表达式。

考虑

$$\begin{cases}(5.64),\ x>0,\ y>0,\\ u(0,\ y)=0,\ \dfrac{\partial u(0,y)}{\partial x}=b(y).\end{cases}\qquad(5.69)$$

由 $H_{0,\beta}$，有

$$u(x,\ y)=H_{0,\beta}v(x,\ y)=\frac{1}{2}H_{0,\beta}[f(x+y)+f(x-y)].$$

再由（5.69），得到

$$H_{0,\beta}[f(y)+f(-y)]=0,$$

$$\frac{1}{2}H_{0,\beta}[f'(y)+f'(-y)]=b(y).$$

由第一式推出，$f$这时必为奇函数，故$f'$是偶函数，从而第二式为：$H_{0,\beta}f'(y)=b(y)$，其中$b(y)$必为偶函数，对上式又可利用$H_{\alpha,\beta}$算子，两边同时用$H_{\beta,1}$从左边作用，由$H_{\alpha,\beta}$传递性（这点不难直接验证），得到

$$\begin{aligned}H_{\beta,1}b(y)&=H_{\beta,1}H_{0,\beta}f'(y)=H_{0,1}f'(y)\\&=2\int_0^1 f'(xy)\,dt=\frac{2}{y}f(y).\end{aligned}$$

（这是因为$f'(y)$是偶函数，$f(y)$是奇函数，故$f(0)=0$）。从而

$$f(y)=\frac{y}{2}H_{\beta,1}b(y)=\frac{y}{2}\frac{2y^{-1}}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^y(y^2-s^2)^{-\beta}s^{2\beta}b(s)ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^y(y^2-s^2)^{-\beta}s^{2\beta}b(s)ds. \qquad (5.70)$$

将（5.70）代入（5.65），注意到

$$\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)=\frac{\pi}{\sin\beta\pi},$$

得到

$$u(x,y)=\int_{x-y}^{x+y}\left[\int_0^s k(x,y,t,s)\,b(t)dt\right]ds. \qquad (5.71)$$

其中，$k=k(x,y,t,s)=\pi^{-1}y^{1-2\beta}\sin\beta\pi\,[y^2-(s-x)^2]^{\beta-1}\left(\frac{s^2}{t^2}-1\right)^{-\beta}$。为改变（5.71）中的积分次序，必须区别$x-y>0$和$x-y<0$两种情形。

若$x\geqslant y$，$s$和$t$恒非负，有

$$u(x,\ y)=\int_{0^-}^{x+y}b(t)\left(\int_{max(x-y,\,t)}^{x+y}kds\right)dt,\quad x\geqslant y>0.$$

若$x<y$，$s$和$t$（虽然永远同号），但两者均可取正和负值，有

$$u(x,\ y)=-\int_{x-y}^{0}b(t)\left(\int_{x-y}^{t}kds\right)dt+\int_{0}^{x+y}b(t)\left(\int_{t}^{x+y}kds\right)dt,$$

$$0<x<y.$$

我们证明此式可简化为

$$u(x,\ y)=\int_{y-x}^{y+x}b(t)\left(\int_{t}^{x+y}kds\right)dt,\quad 0<x<y. \qquad (5.72)$$

为此，我们必须证明

$$-\int_{x-y}^{0}b(t)\left(\int_{x-y}^{t}kds\right)dt+\int_{0}^{y-x}b(t)\left(\int_{t}^{x+y}kds\right)dt=0.$$

因为$b(t)$是$t$的偶函数，假如$0<t<y-x$，则证明

$$\int_{x-y}^{-t}[y^2-(s-x)^2]^{\beta-1}(s^2-t^2)^{-\beta}ds$$

$$=\int_{t}^{x+y}[y^2-(w-x)^2]^{\beta-1}(w^2-t^2)^{-\beta}dw$$

就足够了．但这由如下变换即可得到

$$2x(sw+t^2)-(s+w)(t^2+x^2-y^2)=0.$$

从而（5.72）和（5.71）可以用同一个公式表出

$$u(x,\ y)=\int_{max(0,\,y-x)}^{y+x}b(t)\left(\int_{max(t,\,x-y)}^{x+y}kds\right)dt,$$

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0. \qquad (5.73)$$

此式表示（5.64）的一个解，它是$y$的偶函数，满足初始条件

(5.68)，出现在(5.73)中里面的积分表示这个问题的Riemann函数，它可用超几何函数表出.

3）混合问题

在$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$内求如下问题的解：

$$\begin{cases} (5.64), \\ u(x,\ 0)=f(x),\ u_y(x,\ 0)=0, \\ u(0,\ y)=0. \end{cases} \tag{5.74}$$

由波动方程对应问题的解为

$$v(x,\ y)=\begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+y)+f(x-y)], & x\geqslant y, \\ \frac{1}{2}[f(y+x)-f(y-x)], & x\leqslant y. \end{cases}$$

因而，对于$x\leqslant y$，当$\mathrm{Re}\beta>0$时，我们得到

$$u(x,\ y)=H_{0,\beta}v(x,\ y)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-t^2)^{\beta-1}[f(yt+x)-f(yt-x)]\,dt. \tag{5.75}$$

4）在第一章、我们曾考虑了Калцаевнч方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}-c^2u=0. \tag{5.76}$$

通过特解，我们求出了其解的一般表达式，本段，我们从电报方程的Cauchy问题入手，可直接求出其轴对称 Cauchy 问题的解.

考虑如下问题

$$\begin{cases} (5.76), \ \mathrm{Re}\beta > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

我们先求 $\beta = 0$ 时方程（电报方程）的如下问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - c^2 \bar{u} = 0, \\ \bar{u}(x, 0) = \dfrac{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} f(x), \ \left.\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

由经典解法，我们得到上述问题的解为

$$\bar{u} = \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} [f(x+y) + f(x-y) - cy$$

$$\times \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(c\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2})}{(y^2 - (x-\xi)^2)^{1/2}} f(\xi) d\xi]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left\{ \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)] - \frac{c}{2} y \right.$$

$$\left. \times \int_{-1}^{1} \frac{J_1[cy(1-t^2)^{\frac{1}{2}}]}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} f(x+yt)\, dt \right\}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{\varphi(x+y)-cy\int_0^1\frac{J_1[cy(1-t^2)^{\frac{1}{2}}]}{(1-t^2)^{1/2}}\varphi(x+yt)dt\right\}$$

其中，$\varphi(x+y)=\frac{1}{2}[f(x+y)+f(x-y)]$，而 $u(x,\ y)=CH_{0,\beta}\bar{u}(x,\ y)$。

整理得

$$u(x,y)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{1-2\beta}\int_0^y(y^2-t^2)^{\beta-1}$$

$$\left\{\varphi(x+t)-ct\int_0^t\frac{J_1[c(t^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}]}{(t^2-\tau^2)^{1/2}}\varphi(x+\tau)d\tau\right\}dt$$

$$=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}y^{1-2\beta}\int_0^y\varphi(x+\tau)(y^2-\tau^2)^{\beta-1}$$

$$\times\bar{J}_{\beta-1}[c(y^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}]d\tau$$

$$=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\int_0^1\varphi(t+yt)(1-t^2)^{\beta-1}$$

$$\times\bar{J}_{\beta-1}[cy(1-t^2)^{\frac{1}{2}}]dt.$$

其中

$$\bar{J}_{\beta-1}(y)=\Gamma(\beta)y^{1-\beta}J_{\beta-1}(y).$$

这和已知结果一致。

**3.奇性抛物方程**[70]

考虑

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{2\beta}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \mathrm{Re}\beta>0, \\ u(x, 0)=f(x).\end{cases} \tag{5.77}$$

且 $u(x, t)$ 是 $x$ 的偶函数。

利用 $H_{0,\beta}$ 算子，我们可以使古典的一维热方程的两次连续可微解（它是 $x$ 的偶函数）$v(x, t)$ 和(5.77)的解联系起来，

$$u(x, t)=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 v(x\xi, t)(1-\xi^2)^{\beta-1}d\xi.$$

假如我们进一步假设 $v(x, t)$ 在原点是解析的，（于是 $u(x, t)$ 同样也是），则当 $x$ 和 $t$ 充分小时，我们可将上式写作围道积分

$$u(x, t)=\frac{\int_c v(x\xi, t)(1-\xi^2)^{\beta-1}d\xi}{\int_c(1-\xi^2)^{\beta-1}d\xi}\overset{\text{Def.}}{\equiv}\wedge v(x, t), \tag{5.78}$$

其中当 $\beta>0$ 时，$c$ 是区间[0,1]，而当 $\beta<0$，$2\beta\neq1, -3, -5, \cdots$，时，$c$ 是一个开始和终结于 $\xi=0$ 而内含 $\xi=1$ 反时针方向的环路，由第二节知，上式可逆转为（当 $\beta>0$ 时，就是

$B_\beta$算子，我们这里只考虑Re$\beta>0$情形）

$$v(x,\ t)=\frac{\int_0 u(x\xi,t)\xi^{2\beta}(1-\xi^2)^{-\beta-1}d\xi}{\int_0\xi^{2\beta}(1-\xi^2)^{-\beta-1}d\xi}\stackrel{\text{Def.}}{=}\wedge^{-1}u(x,t).$$

1959年，Resenbloom和Widder 得到了一维热方程Cauchy问题的多项式解，此解在原点某邻域中解析，且在解析空间中完备，这就是

$$v_n(x,\ t)=n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{n-2k}t^k}{(n-2k)!k!}.$$

这个结果在1965年被Bragg和 Haimo 推广到（5.77），其对应的“广义热多项式”由下式给出

$$P_{n,\beta}(x,t)=\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\binom{n}{k}\frac{\Gamma\left(\beta+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta+n-k+\frac{1}{2}\right)}x^{2n-2k}t^k.$$

此式容易得到，事实上，我们如果将$v_{2n}(x,\ t)$代入到(5.78)且逐项积分，立刻得到

$$\wedge v_{2n}(x,\ t)=h_n^{\beta}p_{n,\beta}(x,\ t)=u(x,\ t),$$

其中$h_n^\beta=\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$。不仅如此，我们还有如下结论：

**命题5** 设$u(x,\ t)$是（5.77）的一个解，当$|t|<\sigma,|x|<\sigma$时解析，且设$2\beta\neq-1,\ -2,\ \cdots$，则$u(x,\ t)$可以延拓至

带形 $|t|<\sigma$，$-\infty<x<\infty$，而展成如下形式的级数：

$$u(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n p_{n,\beta}(x,\ t).$$

此级数当 $|t|<\sigma$，$-\infty<x<\infty$ 时收敛。

**证明** 设 $v(x,\ t)=\wedge^{-1}u(x,\ t)$，则 $v(x,\ t)$ 是热方程的一个解，关于 $x$ 是偶函数，当 $|t|<\sigma$，$|x|<\sigma$ 时解析，于是，我们可以写

$$v(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n v_{2n}(x,\ t).$$

利用D. Widder[18]的技巧，可以将上述级数解析延拓至 $|t|<\sigma$，$|x|<\infty$（其中，将 $x$ 视为变量），于是对复平面上任何紧集 $k$，当 $x\in k$，$|t|<\sigma$ 时，上述级数绝对收敛，而再由

$$u(x,\ t)=\wedge v(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\wedge v_{2n}(x,\ t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}b_n h_n^{\beta}p_{n,\beta}(x,\ t),$$

即可得当 $\mathrm{Re}\beta>0$ 时，对 $x\in k$，$|t|<\sigma$，此级数也绝对收敛。

证毕

## §4. 积分算子向高阶方程的推广

在第二节中，我们导入了分数阶积分：

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt.$$

其中$\alpha$是任意实数。1927年以后，Riemann-Liouville, M.Riesz, Hardy等先后在这方面开展了工作，他们将$x$和$\alpha$由实域开拓到复域，五十年代中期到六十年代，Lions, Erdelyi 等又对上式右端被积函数中的因子$(x-t)^{\alpha-1}$，扩充到一类单调函数中，从而使它直接应用于奇性偏微分方程边值问题和Cauchy 问题的研究，然而，所有这些变换都不是很自然的，这里，我们从一类广义超几何偏微分方程出发，自然地导出两类积分算子来。

**1.考虑**

$$Lu \equiv \left[\frac{\partial}{\partial y}\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j-1\right)-P(D_x)\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_i\right)\right]$$

$$\times u(\alpha, r, y, P)=0, \quad p\leqslant q+1. \tag{5.79}$$

其中，$\alpha_j$，$r_j \in C$；$P$是与$y$无关的线性算子，它可与$\frac{\partial}{\partial y}$交换次序。特别，当$P=0$时，定义$\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_i\right)=I$，易见，当$P\equiv 1$，$p=0$，$q=1$时，令$r=\beta+\frac{1}{2}$，再作变换$y=-\frac{1}{4}t^2$，

(5.79) 变为Bessel方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2\beta}{t}\frac{du}{dt}+u=0. \tag{5.80}$$

而再取$P=\pm\frac{\partial^2}{\partial x^2}$，我们就分别得到椭圆和双曲型EPD方程，取$P=\mp\frac{\partial}{\partial x}$，就得正(逆)向奇性抛物方程；若取$P\equiv 1$，$p=2$，$q=1$，$r=c$；$\alpha_1=a$，$\alpha_2=b$，(5.79)就是超几何方程。

对（5.79）注意到如下关系：

$$1^\circ \frac{d}{dy}\left(y\frac{d}{dy}+\alpha\right)=\left(y\frac{d}{dy}+\alpha+1\right)\frac{d}{dy}, \tag{5.81}$$

$$2^\circ \left(y\frac{d}{dy}+r\right)\left(y\frac{d}{dy}+\alpha\right)=\left(y\frac{d}{dy}+\alpha\right)\left(y\frac{d}{dy}+r\right), \tag{5.82}$$

$$3^\circ \left(y\frac{d}{dy}+\alpha\right)u=y^{1-\alpha}\frac{d}{dy}(y^\alpha u). \tag{5.83}$$

将$\frac{d}{dy}$从左边作用于（5.79）$n$次，得到

$$\frac{d^n}{dy^n}\left[\frac{d}{dy}\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{d}{dy}+r_j-1\right)-P(D_x)\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{d}{dy}+\alpha_i\right)\right]u$$

$$=\left[\frac{d}{dy}\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{d}{dy}+r_j+n-1\right)-P(D_x)\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{d}{dy}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_i+n\right)\right]\frac{d^n}{dy^n}u=0.$$

由此立即得：若$u(\alpha, r, y, p)$是（5.79）的解，则

$$u(\alpha, r, y, P)=\frac{d^n}{dy^n}u(\alpha, r, y, p). \tag{5.84}$$

如果成立

$$\frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}}u(\alpha, r, y, P)\Big|_{y\to\infty}=\cdots=\frac{d}{dy}u(\alpha, r,$$

$$y, P)\Big|_{y\to\infty}=u(\alpha, r, y, P)\Big|_{y\to\infty}=0, \tag{5.85}$$

则有

$$u(\alpha, r, y, P)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_y^{\infty}(t-y)^{n-1}u(\alpha+n, r+n, t, P)dt. \tag{5.86}$$

将 $y\frac{d}{dy}+r_{j'}-1$ $(1\leqslant j'\leqslant q)$ 从左作用于 (5.79)，利用1°，2°，3°，即得

$$\left(y\frac{d}{dy}+r_{j'}-1\right)Lu=\left[\frac{d}{dy}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{q}\left(y\frac{d}{dy}+r_j-1\right)\left(y\frac{d}{dy}+r_{j'}-2\right)-P\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{d}{dy}+\alpha_i\right)\right]\times\left[y^{2-r_{j'}}\frac{d}{dy}(y^{r_{j'}-1}u)\right]$$

$$=0.$$

由此推出

$$y^{2-r_{j'}}\frac{d}{dy}[y^{r_j-1}u(\alpha, r, y, P)]=u(\alpha, r_{j'-1}, \hat{r}_j, y, P)^{*}.$$

或者写为

$$\frac{d}{dy}[y^{r_{j'}-1}u(\alpha, r, y, P)]=y^{r_{j'}-2}u(\alpha, r_{j'-1}, \widehat{r_{j'}, y}, P).$$

重复n次得到

$$\frac{d^n}{dy^n}[y^{r_{j'}-1}u(\alpha, r, y, P)]$$

---

*）以 $u(\alpha, r_j'-1, \hat{r}_{j'}, y, p)$ 记(5.79) 对应参数为 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p; r_1, \cdots, r_{j'-1}, r_{j'}-1, r_{j'+1}, \cdots, r_q)$ 的解，关于 $\alpha_i$ 也有类似记法。

$$= y^{r_{j'}-n-1}u(\alpha,\ r_{j}'-n, \widehat{r_{j}'},\ y,\ P), \tag{5.87}$$

若有

$$\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}[y^{r_{j'}-1}u(\alpha,\ r,\ y,P)]\Big|_{y=0}$$

$$= \cdots = y^{r_{j'}-1}\ u(\alpha,\ r,\ y,\ P)|_{y=0} = 0, \tag{5.88}$$

则有

$$u(\alpha,\ r,y,\ P) = \frac{1}{\Gamma(n)}y^{1-r_{j'}}\int_0^y (y-t)^{n-1}t^{r_{j'}-n-1}$$

$$\times u(\alpha, r_{j}'-n, \widehat{r_{j}'},\ t,\ P)dt,\ j'=1,\ 2,\cdots,\ q. \tag{5.89}$$

若以 $y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_{i}'+1$ 从左面作用于 (5.79) 两边 ($1\leqslant i'\leqslant p$),

有

$$\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_{i}'+1\right)Lu = \left[\frac{\partial}{\partial y}\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j-1\right)-P(D_x)\right.$$

$$\left.\times\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i'}}^{p}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_i\right)\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_{i}'+1\right)\right]$$

$$\times\left[y^{1-\alpha_{i'}}\frac{\partial}{\partial y}(y^{\alpha_{i'}}u)\right] = 0.$$

由此，有

$$u(\alpha_{i}'+1,\ \widehat{\alpha_i},\ r,\ y,P) = y^{1-\alpha_{i'}}\frac{\partial}{\partial y}[y^{\alpha_{i'}}u(\alpha,r,y,\ P)],$$

即

$$y^{\alpha_{i'}+1}u(\alpha_i'+1,\ \widehat{\alpha}_i',\ r,\ y,\ P)$$
$$=y^2\frac{\partial}{\partial y}[y^{\alpha_{i'}}u(\alpha,r,\ y,\ P)].$$

重复施行 $n$ 次微分，有

$$\left(y^2\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\left[y^{\alpha_{i'}}u(\alpha,r,y,P)\right]=y^{\alpha_{i'}+n}u(\alpha_i'+n,\widehat{\alpha}_i',$$
$$r,\ y,P),i'=1,\ 2,\ \cdots,\ p. \tag{5.90}$$

为便于应用，有

**命题6**　(5.90) 与下式等价：

$$y^{\alpha_{i'}-1}u(\alpha_i'+n,\ \widehat{\alpha}_i',\ r,\ y,\ P)$$
$$=\frac{\partial^n}{\partial y^n}[y^{\alpha_{i'}+n-1}u(\alpha,\ r,\ y,\ P)]. \tag{5.91}$$

**证明**　用归纳法证之。显见，$n=1$ 时，结论成立。

若 $n=k$ 时成立，即

$$\left(y^2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k[y^{\alpha_{i'}}u(\alpha,r,\ yP,)]=y^{\alpha_{i'}+k}u(\alpha_i'+k,\widehat{\alpha}_i',r,y,P)$$

与

$$y^{\alpha_{i'}-1}u\ (\alpha_{i'}+k,\widehat{\alpha}_i',\ r,y,P)=\frac{\partial^k}{\partial y^k}[y^{\alpha_i+k-1}u(\alpha,r,y,P)]$$

等价，此时有，

$$\left(y^2\frac{\partial}{\partial y}\right)^k[y^{\alpha_{i'}}u(\alpha,\ r,\ y,\ P)]$$
$$=y^{k+1}\frac{\partial^k}{\partial y^k}[y^{\alpha_{i'}+k-1}u(\alpha,\ r,\ y,\ P)].$$

则 $n=k+1$ 时，由

$$y^{k+2}\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}[y^{\alpha_{i'}+k}u(\alpha, r, y, p)]$$

$$=y^{k+2}\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}[y\cdot y^{\alpha_{i'}+k-1}u]$$

$$=y^{k+2}\left\{y\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}(y^{\alpha_{i'}+k-1}u)+(k+1)\frac{\partial^{k}}{\partial y^{k}}(y^{\alpha_i+k-1}u)\right\}$$

$$=y^{2}\left\{y^{k+1}\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}(y^{\alpha_{i'}+k-1}u)+(k+1)\ y^{k}\frac{\partial^{k}}{\partial y^{k}}(y^{\alpha_{i'}+k-1}u)\right\}$$

$$=y^{2}\frac{\partial}{\partial y}\left\{y^{k+1}\frac{\partial^{k}}{\partial y^{k}}(y^{\alpha_{i'}+k-1}u)\right\},$$

由归纳假设，即得上式$=\left(y^2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1}[y^{\alpha_{i'}}u]$。从而结论成立。

证毕。

由此命题，若

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(y^{\alpha_{i'}+n-1}u(\alpha, r, y, P))\Big|_{y=0}=\cdots=y^{\alpha_{i'}+n-1}$$

$$u(\alpha, r, y, P)|_{y=0}=0 \tag{5.92}$$

则有

$$u(\alpha, r, y, P)=\frac{1}{\Gamma(n)}y^{1-\alpha_{i'}-n}\int_0^y (y-t)^{n-1}t^{\alpha_{i'}-1}$$

$$\times u(\alpha_i'+n, \hat{\alpha}_i', r, t, P)dt, \quad i'=1, 2, \cdots, p. \tag{5.93}$$

(5.86)，(5.89)，(5.93) 刻划了 (5.79) 对应参数相差为一整数时，解之间的递推关系。特别，我们有

**命题7** 若 $P\equiv 1$，则 (5.79) 与 (5.87)，(5.91) $p+$

$q+1$ 个方程所成方程组等价。

**证明** 只须证明，若 $u(\alpha, r, y)$ 满足（5.84），（5.87）和（5.91），则必满足(5.79)。但这里我们证明更强的结果。

从（5.84）出发，

$$u(\alpha+n, r-n+1, y)=\frac{d^n}{dy^n}u(\alpha, r-n+1, y)$$

$$=\frac{d}{dy}\left[\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}u(\alpha, r-2n+1, y)\right]$$

$$=\frac{d}{dy}u(\alpha+n-1, r-n, y). \qquad (*)$$

上式左边应用（5.91）得

$$u(\alpha+n, r-n+1, y)$$

$$=y^{1-\alpha_i}\frac{d}{dy}\left\{\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[y\cdot y^{\alpha_i+n-2}u(\alpha_i, \widehat{\alpha}_i+n, r-n+1, y)\right]\right\}$$

$$=y^{1-\alpha_i}\frac{d}{dy}\left\{y\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left[y^{\alpha_j+n-2}u(\alpha_i, \widehat{\alpha}_i+n, r-n+1, y)\right]\right.$$

$$\left.+(n-1)\frac{d^{n-2}}{dy^{n-2}}y^{\alpha_i+n-2}u(\alpha_i, \widehat{\alpha}_i+n, r-n+1, y)\right\}$$

$$=y^{1-\alpha_i}\frac{d}{dy}\left[y\cdot y^{\alpha_i-1}u(\alpha_i+n-1, \widehat{\alpha}_i+n, r-n+1, y)\right.$$

$$\left.+(n-1)\frac{d^{n-2}}{dy^{n-2}}y^{\alpha_i+n-2}u(\alpha_i, \widehat{\alpha}_i+n, r-n+1, y)\right]$$

$$=\alpha_i u(\alpha_i+n-1, \widehat{\alpha}_i+n, r-n+1, y)$$

$$+y\frac{d}{dy}u(\alpha_i+n-1,\widehat{\alpha_i}+n,r-n+1,y)+(n-1)y^{1-\alpha_i}$$

$$\times\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}y^{\alpha_i+n-2}u(\alpha_i,\ \widehat{\alpha_i}+n,\ r-n+1,\ y)$$

$$=\left(y\frac{d}{dy}+\alpha_i\right)u(\alpha_i+n-1,\ \widehat{\alpha_i}+n,\ r-n+1,\ y)$$

$$+(n-1)u(\alpha_i+n-1,\ \widehat{\alpha_i}+n,\ r-n+1,\ y)$$

$$=\left(y\frac{d}{dy}+\alpha_i+n-1\right)u(\alpha_i+n-1,\ \widehat{\alpha_i}+n,\ r-n+1,y).$$

依次取 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$. 上式就化为

$$\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{d}{dy}+\alpha_i+n-1\right)u(\alpha+n-1,\ r-n+1,\ y).$$

对（α）右边使用类似手段，反复应用（5.87），有

$$u(\alpha+n-1,\ r-n,\ y)=\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{d}{dy}+r_j-(n-1)-1\right)$$

$$u(\alpha+n-1,\ r-(n-1),\ y).$$

于是，由（*）就有

$$\left[\frac{d}{dy}\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{d}{dy}+r_j-(n-1)-1\right)-\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{d}{dy}+\alpha_i\right.\right.$$

$$\left.\left.+n-1\right)\right]u(\alpha+n-1,\ r-(n-1),\ y)\equiv 0.$$

特别取 $n=1$，即为（5.79） 证毕.

**推论1** Bessel方程（5.80）与（5.87），（5.91）等价.

其中 $p=0$，$q=1$，$r=\beta+\frac{1}{2}$，$p\equiv 1$，$y=-\frac{1}{4}t^2$。

**推论 2** 超几何方程与（5.84），（5.87），(5.91) 等价。其中 $q=1$，$r=c$，$p=2$，$\alpha_1=a$，$\alpha_2=b$。

利用Bessel方程的等价方程可以直接导出Bessel函数的Sonine公式以及一系列到其他重要公式，同样，利用超几何方程的等价方程也可直接导出超几何函数一系列重要公式。

2. 本段推广（5.86），（5.89），（5.93）的结果，且证明其逆，继而导出应用于EPD方程的分数阶积分算子。

考虑

$$L\left(\alpha,\ r,\ y\frac{\partial}{\partial y},\ p\right)u\equiv\left[\frac{\partial}{\partial y}\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j-1\right)\right.$$

$$\left.-P\,(D_{\omega})\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_i\right)\right]u\equiv 0. \qquad (5.79)$$

**定理 3** 设 $u(\alpha,\ r_j-\omega,\ \widehat{r_j},\ y)$ 是 (5.79) 对应系数为 $(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_p,\ r_1,\ \cdots,\ r_j{}'_{-1},\ r_j{}'-\omega,\ r_j{}'_{+1},\cdots,r_q)$ 的解，且 $Re(r_j{}'-\omega)>1$，$Re\omega>0$，或者 $Re\omega>0$，

$$\lim_{y\to 0}y^{r_j{}'-\omega-1}u\ (\alpha,\ r_j-\omega,\ \widehat{r_j{}'},\ y)=0, \qquad (5.94)$$

则我们定义

$$u(\alpha,\ r,\ y)=\frac{1}{\Gamma(\omega)}y^{1-r_j{}'}\int_0^y(y-t)^{\omega-1}t^{r_j{}'-\omega-1}$$

$$\times u\,(\alpha,\ r_{i\prime}-\omega,\ \widehat{r_j{}'},\ t)dt \qquad (5.95)$$

就是（5.79）的解，且满足条件

$$\lim_{y\to 0} y^{r_{j'}-1}u(\alpha,\ r,\ y)=0, \tag{5.96}$$

**证明** 改写（5.89）为

$$y^{r_{j'}-1}u(\alpha,\ r,\ y)=\frac{\partial^{-n}}{\partial y^{-n}}[y^{r_{j'}-n-1}u(\alpha,r_{j'}-n,\widehat{r_{j'}},\ y)].$$

注意上式左端与 $n$ 无关，于是利用分数阶微积分，将上式右端的 $n$ 延拓到任何实数，我们定义

$$y^{r_{j'}-1}u\ (\alpha,r,\ \ y)=\frac{\partial^{-\omega}}{\partial y^{-\omega}}\left[y^{r_{j'}-\omega-1}u(\alpha,r_{j'}-\omega,\widehat{r_{j'}},\ y)\right]$$

是有意义的，而这正是（5.95）.

我们记

$$L(r_{j'}-\omega,\ \widehat{r_{j'}},\ \ \alpha,\ \ y\frac{\partial}{\partial y})\equiv\frac{\partial}{\partial y}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{q}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j-1\right)$$

$$\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_{j'}-\omega-1\right)-P(D_x)\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_i\right).$$

将$L\left(\alpha,\ \ r,\ \ y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$从左边作用于（5.95）两端，我们可证明其值恒为零。有

$$Lu(\alpha,\ \ r,\ \ y)=\frac{1}{\Gamma(\omega)}L[y^{1-r_{j'}}\int_0^y t^{r_{j'}-\omega-1}(y-t)^{\omega-1}$$

$$u\ (\alpha,\ \ \widehat{r_{j'}},\ \ \ t\ )dt].$$

在积分号下，令 $t=yt_1$，再以 $t$ 代$t_1$，得到

$$\text{上式}=\frac{1}{\Gamma(\omega)}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^{r_{j'}-\omega-1}$$

$$\times[Lu(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ ty)]dt.$$

由于 $P\prod_{i=1}^{p}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_i\right)=P\prod_{i=1}^{p}\left(yt\ \frac{\partial}{\partial yt}+\alpha i\right)$，其中 $t$ 为任一参数，再有

$$L\left(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ y\frac{\partial}{\partial y}\right)u(\alpha,\ r_j'-\omega,\widehat{r_j'},\ y)\equiv 0,$$

故有

$$\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^{r_{j'}-\omega-1}\left[P\prod_{i=1}^{p}\left(yt\ \frac{\partial}{\partial yt}+\alpha_i\right)\right.$$

$$\left.\times u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ \ yt)\right]dt=\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^{r_{j'}-\omega-1}$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial yt}\prod_{\substack{j=1\\ j'\neq j}}^{q}\left(yt\ \frac{\partial}{\partial yt}+r_j'-\omega-1\right)-\left(yt\ \frac{\partial}{\partial yt}+r_j'-\omega-1\right)\right.$$

$$\left.\times u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \ \widehat{r_j'},\ yt)\right]dt.$$

代入原式，有

$$原式=\frac{1}{\Gamma(\omega)}\frac{\partial}{\partial y}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{q}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j-1\right)\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j'-1\right)\right.$$

$$\times\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^{r_{j'}-\omega-1}\times u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \ \widehat{r_j'},\ \ yt)dt$$

$$-\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j'-\omega-1\right)\int_0^1(1-t)^{\omega-1}$$

$$\times t^{r_j'-\omega-2}u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ yt)\,dt\Big\}.$$

我们证明

$$\Big\{\cdots\cdots\Big\}=0.$$

事实上,

$$\Big\{\cdots\cdots\Big\}=-\Big(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j'-1\Big)\int_0^1(1-t)^{\omega}t^{r_j'-\omega-2}$$

$$\times u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ yt)dt$$

$$+\omega\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^{r_j'-\omega-2}u(\alpha,\ r_j'-\omega,\widehat{r_j'},\ yt)dt$$

$$=(1-r_j')\int_0^1(1-t)^{\omega}t^{r_j'-\omega-2}u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ yt)dt$$

$$+\omega\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^{r_j'-\omega-2}u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ yt)dt$$

$$-\int_0^1(1-t)^{\omega}t^{r_j'-\omega-2}\Big[yt\frac{\partial}{\partial yt}u\Big]dt. \qquad (*)$$

在上式右边最后一式中令$yt=t_1$，再以 $t$ 代$t_1$，分部积分，即得

$$-\int_0^1(1-t)^{\omega}t^{r_j'-\omega-2}\Big[yt\frac{\partial}{\partial yt}u\Big]dt$$

$$=y^{1-r_j'}(y-t)^{\omega}t^{r_j'-\omega-1}u\Big|_{t=0}^{t=y}-y^{1-r_j'}\omega$$

$$\times\int_0^y(y-t)^{\omega-1}t^{r_j'-\omega-1}u\,dt+(r_j'-\omega-1)y^{1-r_j'}$$

$$\times\int_0^y(y-t)^{\omega}t^{r_j'-\omega-2}u(\alpha,\ r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'},\ t)dt.$$

由定理条件，积出项为零，将其代入{……}，并在（*）式右边的第一、二两项中，令$yt=t_1$，以$t$代$t_1$，简单计算即得{……}$\equiv 0$.

(5.96) 易由 (5.95) 得到。　　　　证毕。

**推论1**　若以$L^{\omega}_{r_j'}$记算子$\dfrac{y^{1-r_j'}}{\Gamma(\omega)}\displaystyle\int_0^y (y-t)^{\omega-1}t^{r_j'-\omega-1}dt$，则在定理条件下，有

$$L\left(\alpha,\ r,\ y\frac{\partial}{\partial y}\right)L^{\omega}_{r_j'}\equiv L^{\omega}_{r_j'}\ L\left(\alpha, r_j'-\omega,\ \widehat{r_j'}, y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ q. \tag{5.97}$$

**定理4**　若$u(\alpha_i+\omega,\ \widehat{\alpha_i},\ r,\ y)$是(5.79)中对应$\alpha_i$为$\alpha_i+\omega$时方程的解，且或者$\mathrm{Re}\alpha_i>0$，$\mathrm{Re}\omega>0$，或者$\mathrm{Re}\omega>0$，$\lim\limits_{y\to0} y^{\alpha_i}u(\alpha_i+\omega,\ \widehat{\alpha_i},\ r,\ y)=0$，则由下式决定的

$$u(\alpha,\ r,\ y)=\frac{1}{\Gamma(\omega)}y^{1-\omega-\alpha_i}\int_0^y (y-t)^{\omega-1}t^{\alpha_i-1}$$

$$\times\ u(\alpha_i+\omega,\ \widehat{\alpha_i},\ r,\ t)dt. \tag{5.98}$$

就是 (5.79) 的解，且满足$\lim\limits_{y\to0} y^{\alpha_i}u(\alpha,\ r,\ y)=0$.

该定理不难用类似于定理11的方法证之。

**推论1**　若以$K^{\omega}_{\alpha_i}f$记积分算子$\dfrac{1}{\Gamma(\omega)}y^{1-\omega-\alpha_i}\displaystyle\int_0^y (y-t)^{\omega-1}\times t^{\alpha_i-1}f(x)dt$，则在定理12条件下，有

$$L\left(\alpha,\ r,\ y\frac{\partial}{\partial y}\right)K^{\omega}_{\alpha_i}\equiv K^{\omega}_{\alpha_i}\ L\left(\alpha_i+\omega,\ \widehat{\alpha_i},\ r,\ y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ p. \tag{5.99}$$

由以上两个定理，我们得到如下结论：

方程（5.79）若对某一$r_j > 1$时有解，或者$r_j \leqslant 1$，但解满足$\lim\limits_{y\to 0} y^{r_j-1}u(\alpha, r, y)=0$，则对一切$r_j' \geqslant r_j$的$r_j'$，方程恒有解，其解之间满足（5.95），同时存在积分算子，使（5.97）成立。若对某一个$\alpha_i'$，方程有解，则对一切满足$\alpha_i=\alpha_i'-\omega>0$的$\alpha_i$，或者$\alpha_i<0$，但是$\lim\limits_{y\to 0} y^{\alpha_i'-\omega}u(\alpha_i', r, y)=0$的$\alpha_i$，（5.79）恒有解，其间满足（5.98），存在积分算子$K^{\omega}_{\alpha_i}$，使（5.99）成立。

为考虑与（5.84）相应的积分算子，从对EPD方程的应用出发，我们考虑：

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+\beta-\frac{1}{2}\right)-P(D_x)\right]u\left(\beta+\frac{1}{2}, y\right)=0. \tag{5.100}$$

这是（5.79）中$q=1$，$p=0$的特殊情形。

**定理5** 若$u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2}, y\right)$是（5.100）参数为$\beta+\omega+\frac{1}{2}$时的解，

1°满足$\lim\limits_{y\to 0}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2}, y\right)=0$，则

$$u\left(\beta+\frac{1}{2}, y\right)=\frac{1}{\Gamma(\omega)}\int_0^y (y-t)^{\omega-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2}, t\right)dt, \tag{5.101}$$

就是（5.100)的解，且有$\lim\limits_{y\to 0}u\left(\beta+\frac{1}{2}, y\right)=0$.

2°若满足$\lim\limits_{y\to\infty}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ y\right)=0$，且$y^{\omega-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ y\right)$在$\infty$处可积，则

$$u\left(\beta+\frac{1}{2},\ y\right)=\frac{1}{\Gamma(\omega)}\int_y^{\infty}(t-y)^{\omega-1}$$

$$u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ t\right)dt, \qquad (5.102)$$

就是（5.100）的解，且有$\lim\limits_{y\to\infty}u\left(\beta+\frac{1}{2},\ y\right)=0$.

**证明** 只须证明（5,101），类似可证（5.102）.

改写（5.101）为

$$u\left(\beta+\frac{1}{2},\ y\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\omega)}\int_0^1 y^{\omega}(1-t)^{\omega-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)dt.$$

于是

$$P(D_\omega)u\left(\beta+\frac{1}{2},\ y\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\omega)}y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}P(D_\omega)\ u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)dt,$$

$$\Gamma(\omega)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}u\left(\beta+\frac{1}{2},\ y\right)$$

$$=\omega\left(\beta+\frac{1}{2}\right)y^{\omega-1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)dt$$

$$+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t\frac{\partial u}{\partial ty}dt,$$

$$\Gamma(\omega)\,y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\omega(\omega-1)\,y^{\omega-1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}udt+2\omega y^{\omega}$$

$$\times\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t\,\frac{\partial u}{\partial ty}dt+y^{\omega+1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2 y^2}dt.$$

故

$$\left[P(D_x)u-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{1}{\Gamma(\omega)}y^{\omega}$$

$$\times\int_0^1(1-t)^{\omega-1}P(D_x)udt+\omega(1-\omega)\,y^{\omega-1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}udt$$

$$-2\omega y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t\frac{\partial u}{\partial ty}dt-y^{\omega+1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2 y^2}dt$$

$$-\omega\left(\beta+\frac{1}{2}\right)y^{\omega-1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}udt$$

$$-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t\frac{\partial u}{\partial ty}\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)dt.$$

但是

$$yt\frac{\partial^2 u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)}{\partial t^2 y^2}+\left(\beta+\omega+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)}{\partial ty}-P\,(D_x)\ \times u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)=0,$$

由此解出 $P(D_{\omega})u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ yt\right)$，代入原式，经过整理，得到

$$\left[P(D_{\omega})u-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial u\left(\beta+\frac{1}{2},y\right)}{\partial y}\right]=y^{\omega}$$

$$\times\int_0^1(1-t)^{\omega}yt\frac{\partial^2 u}{\partial t^2y^2}dt+\left(\beta+\omega+\frac{1}{2}\right)y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega}\frac{\partial u}{\partial ty}dt$$

$$-\omega y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t\frac{\partial u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)}{\partial ty}dt$$

$$-\left(\omega^2+\beta\omega-\frac{1}{2}\omega\right)y^{\omega-1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ ty\right)dt.$$

对上式右边第一项分部积分，有

$$y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega}yt\frac{\partial^2 u}{\partial t^2y^2}dt=y^{\omega}(1-t)^{\omega}tu'_{ty}\Big|_{t=0}^{t=1}+\omega y^{\omega}$$

$$\times\int_0^1(1-t)^{\omega-1}t\frac{\partial u}{\partial ty}dt-y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega}\frac{\partial u}{\partial ty}dt.$$

由定理条件1°，不难证明积分项为零；其余两项代入原式，有

$$原式=\left(\beta+\omega-\frac{1}{2}\right)y^{\omega}\int_0^1(1-t)^{\omega}\frac{\partial u}{\partial ty}dt$$

$$-\left(\omega^2+\beta\omega-\frac{1}{2}\omega\right)y^{\omega-1}\int_0^1(1-t)^{\omega-1}udt.$$

分部积分第一式，除积出项外，其余项恰与后一项抵消．故有

$$原式=\left(\beta+\omega-\frac{1}{2}\right)y^{\omega}(1-t)^{\omega}u\left(\beta+u+\frac{1}{2},\ ty\right)\Big|_{t=0}^{t=1}=0$$

（由条件1°）．

至于$\lim\limits_{y\to 0}u\left(\beta+\dfrac{1}{2},\ y\right)=0$，由1°及（5.101），立刻可得．

证毕．

**推论** 若以$H_{\beta}^{\omega}f$记$\dfrac{1}{\Gamma(\omega)}\displaystyle\int_0^y(y-t)^{\omega-1}f(x)dt$，则对满足1°的任何函数，有

$$L\left(\beta,\ y\frac{\partial}{\partial y}\right)H_{\beta}^{\omega}\equiv H_{\beta}^{\omega}L\left(\beta+\omega,\ y\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{5.103}$$

**注** 1°此定理可以毫无困难地推广到

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\prod_{j=1}^{q}\left(y\frac{\partial}{\partial y}+r_j-1\right)-p(D_x)\right]u=0$$

一类高阶奇型偏微分方程中．

2° 用同样手段可证其逆也真，这就推广了（5.86）．

3° 由证明过程易见，若$\mathrm{Re}\omega<0$，(5.103）所确定的有限部分仍是（5.100）的解．

例 考虑：

$$y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+r\frac{\partial u}{\partial y}-\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ 0<\alpha<r<1. \tag{5.104}$$

奇线$y=0$是该方程的一条特征线．

当$r=2$时，易见此时方程有如下形式的解：

$$\bar{u}=f(x+y)+\int_0^y t^{-r}c(x+y-t)dt=\bar{u}_1+\bar{u}_2.$$

$\bar{u}_1$在$y=0$正则，而$\bar{u}_2$带有$1-r$阶奇性，利用定理12，当$r>2$时，有解

$$u_1=\frac{1}{\Gamma(r-\alpha)}y^{1-r}\int_0^y(y-t)^{r-\alpha-1}t^{\alpha-1}f(x+t)dt,$$

$$u_2=\frac{1}{\Gamma(r-\alpha)}y^{1-r}\int_0^y(y-t)^{r-\alpha-1}t^{\alpha-r}$$

$$\times\int_0^1 z^{-r}c[x+t(1-z)]dzdt.$$

M. M. Смирнов曾研究了奇线是特征线包络时，方程的定解问题

$$\begin{cases} y^m\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \\ \lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,\ y)u=\tau(x),\ \lim\limits_{y\to 0}\psi(x,\ y)u_y=\nu(x), \\ \lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,\ y)=0,\ \lim\limits_{y\to 0}\psi(x,\ y)=0. \end{cases}$$

我们可仿此提

$$\begin{cases} (5.104), \\ \lim\limits_{y\to 0}y^r\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ \lim\limits_{y\to 0}u(x,\ y)=\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(r)}\tau(x),\tau\in C^2. \end{cases}$$

利用定理12的算子，可得到

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\Gamma(r-\alpha)}y^{1-r}\int_0^y(y-t)^{r-\alpha-1}t^{\alpha-1}\tau(x+t)\,dt.$$

3. 如果我们将定理11和13中的分数阶积分算子应用于EPD方程，我们就导出了两类分数阶积分算子。

考虑方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \beta\in IR. \tag{5.105}$$

为直接利用定理的结果，我们先有

**命题8** 方程 $pu-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 的解与方程$\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[z\frac{\partial}{\partial z}+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\right]-p(D_\infty)\right\}u=0$的解之间，在$y\geqslant 0$半平面，存在一对一的映射$y\to\frac{1}{4}y^2=z$，若$\bar{u}\left(\beta+\frac{1}{2},\ z,\ p\right)$是后一方程的解，则有

$$\bar{u}\left(\beta+\frac{1}{2},\ z,\ p\right)=\bar{u}\left(\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}y^2,\ p\right)$$

$$=u\left(\beta+\frac{1}{2},\ y,\ p\right).$$

其中$u\left(\beta+\frac{1}{2},\ y,\ p\right)$是(5.105)的解，$p$是任一可与$\frac{\partial}{\partial y}$交换的线性算子。

证明是容易的。从略。

特别：$p=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$就是(5.105)；$p=\triangle$，$\triangle$为$m$维空间的Laplace算子，就得到$m+1$维的EPD方程。

由命题14和定理11，立得

**定理6** 设$u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)$是(5.105)的满足条件

$\lim\limits_{y\to 0} y^{2\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ 的解（或$y^{2\beta-1}u\to 0$），则

$$u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=H_{\beta,\beta+\mu}u\left(\beta+\frac{1}{2},x,y\right)$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\omega)}\int_0^1(1-t^2)^{\omega-1}t^{2\beta}u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ ty\right)dt. \quad (5.106)$$

就是（5.105）的以$\beta+\omega$代$\beta$时方程的解，且有

$$\lim_{y\to 0}y^{2(\beta+\omega)}\frac{\partial u}{\partial y}\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=0$$

$$\left[\text{或}y^{2(\beta+\omega)-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)\to 0\ (y\to 0)\right].$$

**证明** 由定理11立刻可得结论．只须注意$r_j'=\beta+\dfrac{1}{2}$，

（5.95）变为

$$\bar{u}\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=y^{\frac{1}{2}-\beta}\frac{1}{\Gamma(\omega)}\int_0^y(y-t)^{\omega-1}t^{\beta-\omega-\frac{1}{2}}$$

$$\times u\left(\beta-\omega+\frac{1}{2},\ x,\ t\right)dt.$$

以$\dfrac{1}{4}y^2$代上式中$y$，再在积分号下令$t=\dfrac{1}{4}y^2t^2$，再以$\beta$代替$\beta-\omega$，便得

$$u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=\frac{1}{\Gamma(\omega)}\left(\frac{y}{2}\right)^{1-2(\beta+\omega)}$$

$$\times\int_0^{\frac{1}{4}y^2}\left(\frac{1}{4}y^2-t\right)^{\omega-1}t^{\beta-\frac{1}{2}}u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ t\right)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\omega)}\left(\frac{y}{2}\right)^{1-2(\beta+\omega)}\int_0^1\left(\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{4}y^2t^2\right)^{\omega-1}t^{\beta-1}$$

$$\times\left(\frac{1}{4}y^2\right)^{\beta-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}y^2tu\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ ty\right)dt$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\omega)}\int_0^1(1-t^2)^{\omega-1}t^{2\beta}u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ ty\right)dt$$

$$=H_{\beta,\beta+\omega}u.$$

记$\omega=\alpha$，则当$\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$\mathrm{Re}\,\beta>0$且

$\lim\limits_{y\to0}y^{2\beta}u_y\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=0$时，上式恒成立，这一方面说明：$H_{\alpha,\beta}$算子是以（5.105）中奇性解恒为零为条件的，即$H_{\alpha,\beta}$与正则解相对应。同时又说明：$H_{\alpha,\beta}$关于正则解有传递性。

如果$\mathrm{Re}\,\omega<0$，我们取积分的有限部分，上述结论仍成立。

此定理还表明：定理11中的$L^{\omega}_{\gamma\beta}$正是$H_{\alpha,\beta}$向（5.79）一类高阶奇方程的推广。

与定理13相应的有

**定理7** 若$u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)$是（5.105）中参数为$\beta+\omega$时的解。

1°满足条件$\lim\limits_{y\to0}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=0$，则

$$u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)$$

$$=\frac{2^{1-2\omega}}{\Gamma(\omega)}y^{2\omega}\int_0^1 t(1-t^2)^{\omega-1}\ u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ ty\right)dt \tag{5.107}$$

就是（5.105）的解，且满足

$$\lim_{y\to 0}u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=0.$$

2°若满足条件$\lim\limits_{y\to\infty}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},x,y\right)=0$，$y^{8\omega-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)$在无穷远处可积，则

$$u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)$$

$$=\frac{2^{1-2\omega}}{\Gamma(\omega)}y^{2\omega}\int_0^\infty t(t^2-1)^{\omega-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},x,\ ty\right)dt.$$

就是（5.105）的解，且有$y\to\infty$时，$u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)\to 0$.

此定理的证明类似于上一定理。

若以$\overline{H}_{\alpha,\beta}$记算子（5.107），其中$\alpha=\omega$，则由定理7的条件立刻可见，该分数阶积分算子是以正则解恒为零为条件的，即它对正则解不起作用，其次，若$u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},x,y\right)$是(5.105)中参数为$\beta+\omega$时的一奇性解，即

$$\lim_{y\to 0}y^{2(\beta+\omega)-1}u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=\tau(x).$$

则由（5.107），有

$$\lim_{y\to 0} y^{2\beta} u\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=\frac{2^{1-2\omega}}{\Gamma(\omega)}\int_0^1 t(1-t^2)^{\omega}$$

$$\times\left[\lim_{y\to 0} y^{2(\beta+\omega)-1} u\left(\beta+\omega+\frac{1}{2},\ x,\ ty\right)\right]dt=C\cdot\tau(x)\neq 0.$$

这正说明$\overline{H}_{\alpha,\beta}$将以$\beta+u$为参数的（5.105）的奇性解直接映射为（5.105）的奇性解。

如果注意到（5.105）有两类解

$$u_1\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,y\right)=\int_0^1\psi(x+yt)(1-t^2)^{\beta-1}dt$$

和

$$u_2\left(\beta+\frac{1}{2},\ x,\ y\right)=y^{1-2\beta}\int_0^1\varphi(x+yt)(1-t^2)^{-\beta}dt,$$

为使$u_1\equiv 0$，而$u_2\neq 0$，必须有$\beta+\omega<\frac{1}{2}$，否则当$\beta+\omega\geqslant\frac{1}{2}$时，

$$\lim_{y\to 0} y^{1-2(\beta+\omega)}\int_0^1\varphi(x+yt)(1-t^2)^{-\beta-\omega}dt=0,$$

推出

$$\int_0^1\varphi(x+yt)(1-t^2)^{-(\beta+\omega)}dt=0\,(y^{2(\beta+\omega)-1}).$$

此时必有$\varphi\equiv 0$，这表明$\overline{H}_{\alpha,\beta}$适用于$\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<\frac{1}{2}$。

在（5.107）中以$\beta$代替$\beta+\omega$，$\omega=2$，则对于（5.105）的奇性解之间有

$$u(\alpha, x, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \alpha^{1+2(\alpha-\beta)} y^{2(\beta-\alpha)}$$

$$\times \int_0^1 t(1-t^2)^{\beta-\alpha-1} u(\beta, x, ty)\,dt, \left(\mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}\beta < \frac{1}{2}\right).$$

若以算子等式表示，有

$$\overline{H}_{\beta-\alpha,\beta} L_\beta \equiv L_{\beta-\alpha} \overline{H}_{\beta-\alpha,\beta}. \tag{5.108}$$

而由（5.106）有

$$H_{\beta-\alpha,\beta} L_\beta \equiv L_\beta H_{\beta-\alpha,\beta}. \tag{5.109}$$

其中 $L_\beta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{2\beta}{y}\frac{\partial}{\partial y}$，$L_{\beta-\alpha}$表示类似.

注　关于$\overline{H}_{\alpha、\beta}$算子的应用仅以一例表明.

考虑

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{2\beta}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \mathrm{Re}\beta < 0, \\ u(x, 0) = 0, \ y^{2\beta-1} u(x, y)|_{y=0} = \tau(x). \end{cases}$$

首先考虑：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0, \\ \bar{u}(x, y) = 0 \ (y \to 0), \ y^{-1}\bar{u}(x, y)|_{y=0} = \tau_1'(x), \\ \tau_1'(x)\text{待定}. \end{cases}$$

易得$\bar{u} = \frac{1}{2}[t_1(x+y) - \tau_1(x-y)]$，于是

$$u(x, y, \beta) = \overline{H}_{-\beta,0}\bar{u} = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \times 2^{1+2\beta}$$

$$\times \int_0^1 t(1-t^2)^{-\beta-1} \left[\frac{1}{2}\tau_1(x+ty) - \frac{1}{2}\tau_1(x-ty)\right] dt.$$

不难验证，上式确是所求问题的解。只须取$\tau_1'(x) = 2^{1-2\beta}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\tau(x)/\sqrt{\pi}$.类似仍可考虑混合问题和空间EPD方程.

## §5. 几点注记

1. 由第四节结果，对应于第二节，易见$H_{0,\beta} = C\mathscr{B}_\beta$, $H_{\beta,0} = C_1 B_\beta$，其中$C$和$C_1$仅为一常数，故Lions所考虑的积分算子仅是我们导出的两类算子$H_{\alpha,\beta}$和$\overline{H}_{\alpha,\beta}$中的一类与正则解相应的算子，如果注意到$H_{\alpha,\beta}$的两个特例$H_{0,\beta}$就是$\mathscr{B}$和$B_\beta$，则$B_\beta$和$\mathscr{B}_\beta$互为逆算子就很明白了，且Lions所考虑的$\varepsilon^*$空间就是很自然的了。易于表明，对正则解所构成的空间，$H_{\alpha,\beta}$有迭加性，即$H_{\alpha,\beta}H_{\beta,r} = H_{\alpha,r}$，于是立刻有

$H_{0,\beta}H_{\beta,0} = H_{0,0} = I$.

2. A. Erdelyi[29]从分数阶积分算子出发，适当开拓被积函数中的因子$(x-t)$、再利用EPD方程的Weinstein循环式，也导出了两类分数阶积分算子，不难证明，这些算子同样是$H_{\alpha,\beta}$算子的特殊情形，为说明这点，我们简述一下Erdelyi这方面工作中的主要轮廓：

第一节，我们曾介绍了分数阶积分算子$I^\alpha$，

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Erdelyi将$(x-t)$开拓为

$$I_{\varphi}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty}[\varphi(x)-\varphi(t)]^{\alpha-1} f(t) \varphi'(t) d t. \tag{5.110}$$

其中$\varphi$是严格单调递增连续可微函数，$\mathrm{Re}\alpha>0$，若$\mathrm{Re}\alpha<0$时，定义$I^{\alpha}=(I^{-\alpha})^{-1}$，如果$\varphi(x)=x$，就是原先的定义，现在令$\varphi(x)=x^2$，得到

$$[I_{y^2}^{\alpha} f](x)=\frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty}(x^2-y^2)^{\alpha-1} y f(y) d y. \tag{5.111}$$

若记$I_{y^2}^{\eta, \alpha}=(y^2)^{-n-\alpha} I_{y^2}^{\alpha} y^{2n}$，则不难验证有

$$I_{y^2}^{\eta, \alpha}(y^{2\beta} f)=y^{2\beta} I_{y^2}^{\beta+\eta, \alpha} f,$$

$$(I_{y^2}^{\eta, \alpha})^{-1}=I_{y^2}^{\nu+\alpha,-\alpha}, \quad I_{y^2}^{\eta+\beta, \alpha} I_{y^2}^{\eta, \beta}=I_{y^2}^{\eta, \alpha+\beta}.$$

又由于

$$L_{\beta}=\frac{d^2}{d y^2}+\frac{2\beta}{y} \frac{d}{d y}=y^{-2\beta} \frac{d}{d y}\left(y^{2\beta} \frac{d}{d y}\right)$$

$$=\frac{1}{y} \frac{d}{d y} y^{2-2\beta} \frac{d}{d y} y^{2\beta-1},$$

则在与$H_{\alpha+\beta,\beta}$相同的条件下，成立有

$$I_{y^2}^{\beta-\frac{1}{2}} L_{\beta} f=L_{\beta+\alpha} I_{y^2}^{\beta-\frac{1}{2}, \alpha} f.$$

由于$I_{y^2}^{\eta, \alpha}$与$x$无关，故与$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$可换，从而有

$$I_{y^2}^{\beta-\frac{1}{2},\alpha}\left(L_\beta-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)=\left(L_{\beta+\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)I_{y^2}^{\beta-\frac{1}{2},\alpha}.$$

这正是$H_{\beta,\alpha+\beta}$，即

$$I_{y^2}^{\beta-\frac{1}{2},\alpha}\equiv H_{\beta,\alpha+\beta}\text{（可能相差一个常数因子）}. \quad (5.112)$$

如果考虑的分数阶积分是

$$k^\alpha f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

开拓$(t-x)^{\alpha-1}$为$(\varphi(t)-\varphi(x))^{\alpha-1}\varphi'(t)$，就有

$$k_\varphi^\alpha f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_y^\infty[\varphi(t)-\varphi(y)]^{\alpha-1}\varphi'(t)f(t)dt.$$

其中$\varphi$是单调递增连续可微函数，仿前，引进$k_\varphi^{\eta,\alpha}=\varphi^\eta k_\varphi^\alpha\varphi^{-\eta-\alpha}$，同样可以验证，有

$$k_\varphi^{\eta,\alpha}k_\varphi^{\eta+\alpha,\beta}=k_\varphi^{\eta,\alpha+\beta},\quad (k_\varphi^{\eta,\alpha})^{-1}=k_\varphi^{\eta+\alpha,-\alpha}.$$

若取$\varphi=y^2$，则在一定条件下，有

$$L_\beta k_{y^2}^{-\frac{1}{2}-\beta,\alpha}=k_{y^2}^{-\frac{1}{2}-\beta,\alpha}L_{\beta-\alpha},$$

即$\left(L_\beta-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)k_{y^2}^{-\frac{1}{2}-\beta,\alpha}=k_{y^2}^{-\frac{1}{2}-\beta,\alpha}\left(L_\beta-\alpha-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$

而在使$k_{y^2}^{\eta,\alpha}$成立的同一条件下，将$H_{\beta-\alpha,\beta}$算子积分限取作$y$到$\infty$，则同样成立

$$\left(L_\beta-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)H_{\beta-\alpha,\beta}=H_{\beta-\alpha,\beta}\left(L_{\beta-\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$$

故$k_{y^2}^{\eta,\alpha}$仍然是$H_{\alpha,\beta}$类算子。

至于$\overline{H}_{\alpha,\beta}$，这里是第一次得到。

3.在解决所谓的"广义Winstein辐射"问题中，Lions[31]文将$H_{\alpha,\beta}$所作用的函数空间从$\varepsilon$开拓到广义函数空间$\mathscr{D}'_{-}(\Omega)$，其中$\mathscr{D}'_{-}(\Omega)$是$\mathscr{D}_{+}(\Omega)$的对偶空间，而

$$\mathscr{D}_{+}(\Omega)=\{u\in C^{\infty}(\Omega),\ supp u\subset\Omega,\ \Omega=(0,\infty)\}.$$

他证明了：在$L_\beta$和$L_0$之间存在一转移算子$K_\beta$，使$K_\beta L_0 T=L_\beta K_\beta T$，$T\in\mathscr{D}_{-}'(\Omega)$，但$K_\beta$是$\mathscr{D}_{-}'(\Omega)$到自身的同构算子，而$K_\beta$算子不是别的，正是$y^{-\beta}(H_{\beta,0}y^{-\beta})^*$，即

$$K_\beta f=cy^{-\beta}(H_{\beta,0}y^{-\beta})^*f,\ f\in\mathscr{D}_{-}'(\Omega),\ c=\text{const}. \tag{5.113}$$

至于该文中导出的$H_\beta$，作为$K_\beta$的逆算子，作者已经证明了有如下广函等式

$$c\,(y^\beta\mathscr{B}_\beta)^*(y^\beta f)=H_\beta f,\ f\in\mathscr{D}_{-}'(\Omega),\ c=\text{const}.$$

用我们的记号就是

$c\,(y^\beta H_{0,\beta})^*(y^\beta f)=H_\beta f$，"*"表示共轭。

事实上，从$K_\beta L_0T=L_\beta K_\beta T$，我们可直接证明（5.113）。

由$L_0B_\beta=B_\beta L_\beta$，但是$y^\beta L_\beta y^{-\beta}=M_\beta$为自共轭算子，故有

$$L_0B_\beta=B_\beta y^{-\beta}M_\beta y^\beta.$$

得到

$$L_0B_\beta y^{-\beta}=B_\beta y^{-\beta}M_\beta.$$

取共轭，得到

$$(B_\beta y^{-\beta})^*L_0=M_\beta(B_\beta y^{-\beta})^*$$

从而$(B_\beta y^{-\beta})^*L_0=y^\beta L_\beta y^{-\beta}(B_\beta y^{-\beta})^*$，

即 $y^{-\beta}(B_\beta y^{-\beta})^* L_0 = L_\beta(y^{-\beta}(B_\beta y^{-\beta})^*)$.

我们计算

$$(B_\beta y^{-\beta})^* f,\quad f\in\mathscr{D}'_-(\Omega).$$

有

$$<(B_\beta y^{-\beta})^* f,\ \varphi> = \int_0^\infty f(y) B_\beta y^{-\beta}\varphi(y)dy$$

$$= b_\beta \int_0^\infty f(y) y \int_0^y (y^2-z^2)^{-\beta-1} z^\beta \varphi(z) dz dy.$$

$y$ 和 $z$ 互换，得

$$\text{上式} = b_\beta \int_0^\infty f(z) z \int_0^z (z^2-y^2)^{-\beta-1} y^\beta \varphi(y) dy dz.$$

交换积分次序，

$$\text{上式} = b_\beta \int_0^\infty \varphi(y)\ y^\beta dy \int_y^\infty z(z^2-y^2)^{-\beta-1} f(z) dz,$$

$$\forall \varphi\in\mathscr{D}_+(\Omega).$$

故 $(B_\beta y^{-\beta})^* f = b_\beta y^\beta \int_y^\infty z(z^2-y^2)^{-\beta-1} f(z) dz$.

从而

$$y^{-\beta}(B_\beta y^{-\beta})^* f = b_\beta \int_y^\infty z(z^2-y^2)^{-\beta-1} f(z) dz.$$

上式右端正与〔31〕中由（2.3）式所定义的$K_\beta$一致.

4.本世纪六十年代，在偏微分方程发展史上，出现了“拟微分算子”这一有力工具，随之而来的各种奇异拟微分算子理论也开始为人们所研究，1974年，由 Киприянов 和 Катраиов 利用 Fourier-Bessel 变换，首先研究了一类带$L_\beta$算子的奇异拟微分算子，1977年，Киприянов 和 Катрахов利用$x_\nu$算子，将带有$L_\beta$算

子和$\frac{\partial}{\partial y}$算子的奇异拟微分算子与一般标准拟微分算子联系了起来，从而使标准拟微分算子理论可以几乎原封不动地转移过来，而这里所用的$\varkappa_v$算子，不是别的，正是$H_{0,v}$算子。可以预见，在研究奇异拟微分算子理论时，$H_{0,\alpha}$和$H_{\alpha,0}$算子将会引起越来越多的数学工作者的注意。

# 附　录

## 一、Bessel 函　数

称形如

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

或

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

的方程为$\nu$阶Bessel方程。

若将方程改写为

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,$$

且设$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\rho+n}$，则代入后比较$x^\rho$前的系数，得到

$$c_0[\rho(\rho-1)+\rho-\nu^2]=0.$$

但$c_0\neq 0$，故为

$$\rho(\rho-1)+\rho-\nu^2=\rho^2-\nu^2=0.$$

称上述关于$\rho$的二次方程为Bessel方程的指数方程。

当$\rho$不为整数时，这方程有两个线性无关的解：

$$J_{\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},$$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}.$$

这两个级数在整个 $x$ 平面内都是收敛的。由这两个级数所表达的函数$J_{\nu}(x)$,$J_{-\nu}(x)$ 称为 $\nu$ 阶的第一类 Bessel 函数。当 $\nu$ 为整数时，例如 $\nu=n$，则

$$J_{-n}(x)=(-1)^{n}J_{n}(x).$$

称函数

$$N_{\nu}(x)=\frac{J_{\nu}(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$$

为Neumann函数或 $\nu$ 阶第二类Bessel函数。当 $\nu$ 为整数时，它与Bessel函数$J_{\nu}(x)$构成Bessel方程的两个线性独立的解。

称

$$\begin{cases}H_{\nu}^{(1)}(x)=J_{\nu}(x)+iN_{\nu}(x),\\ H_{\nu}^{(2)}(x)=J_{\nu}(x)-iN_{\nu}(x).\end{cases}$$

为Hankel函数。注意到$N_{\nu}(x)$的表达式，可写上面两式为

$$\begin{cases}H_{\nu}^{(1)}(x)=-\dfrac{1}{i\sin\pi\nu}[J_{\nu}(x)e^{-i\pi\nu}-J_{-\nu}(x)],\\ H_{\nu}^{(2)}(x)=\dfrac{1}{i\sin\pi\nu}[J_{\nu}(x)e^{i\pi\nu}-J_{-\nu}(x)].\end{cases}$$

**1. 下标不同的Bessel函数之间有下列的一些递推公式**

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu}J_\nu(x)) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^{\nu}J_\nu(x)) = x^{\nu}J_{\nu-1}(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x).$$

更一般的，对任意正整数 $n$，

$$\frac{d^n}{(xdx)^n}(x^{-\nu}J_\nu(x)) = (-1)^n x^{-n-\nu}J_{n+\nu}(x),$$

$$\frac{d^n}{(xdx)^n}(x^{\nu}J_\nu(x)) = x^{\nu-n}J_{\nu-n}(x).$$

成立。特别地，有

$$\begin{cases} J_0'(x) = -J_1(x), \\ \dfrac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x). \end{cases}$$

注意到$J_0(0) = 1$，可写上式为

$$\int_0^x J_1(x)\,dx = 1 - J_0(x);\ \int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x).$$

**2.当 $n$ 为正整数时，Bessel函数 $J_{\pm\frac{2n+1}{2}}(x)$ 可用初等函数表示**

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{(xdx)^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right),$$

$$J_{-\frac{2n+1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{(xdx)^n}\left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

特别地有

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x; J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

**3. 当 $\nu$ 为非整数时，$J_\nu(x)$ 可表为积分形式**

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\sin\phi+i\nu\phi}d\phi-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-x\sh\xi-\nu\xi}d\xi.$$

当 $\nu$ 为整数 $n$ 时，有

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\sin\phi+in\phi}d\phi=\frac{(-i)^n}{2\pi}$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\cos\psi+in\psi}d\psi.$$

特别地

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\sin\phi}d\phi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\cos\psi}d\psi.$$

**4. Bessel函数的渐近公式**

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+0\left(x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

特别地有

$$J_0(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$J_1(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

5. $J_n(x)$有如下加法定理

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(y),$$

$$J_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha})$$

$$=J_0(x)J_0(y)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k(x)J_{-k}(y)\cos k\alpha.$$

6. 含有Bessel函数的某些积分公式是

$$\int_0^{\infty}e^{-z\lambda}J_0(\lambda x)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\quad(z>0),$$

$$\int_0^{\infty}J_1(\lambda x)e^{-\lambda z}d\lambda=\frac{1}{x}\left(1-\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right),$$

$$\int_0^{\infty}J_\nu(\lambda x)e^{-t\lambda^2}\lambda^{\nu+1}d\lambda=\frac{1}{2t}\left(\frac{x}{2t}\right)^{\nu}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$\int_0^{\infty}J_0(\lambda x)\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\lambda d\lambda=\frac{e^{ik\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}},$$

$$\int_0^{\infty}J_m(at)\frac{J_n(b\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}t^{m+1}dt=\begin{cases}\dfrac{a^m}{b^n}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{x}\right)^{n-m-1}\\ \times J_{n-m-1}(x\sqrt{a^2-b^2})\\ (0<a<b),\\ 0\qquad(a>b>0).\end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\cos bt dt = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\nu \arcsin\dfrac{b}{a}\right)}{\sqrt{a^2-b^2}} \ (a>b), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\mathrm{Re}\nu > -1), \\ -\dfrac{a^\nu \sin\dfrac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{b^2-a^2}\,(b+\sqrt{b^2-a^2})^\nu} \ (a<b). \end{cases}$$

**7.** Bessel**函数**$J_\nu(x)$**当** $\nu$ **为实数且大于-1时有无穷多个实零点，这些零点关于坐标原点对称地分布着．设**$k_1^{(\nu)}$，$k_2^{(\nu)}$，…，**是方程**$J_\nu(lx)=0$**的根，则**

$$\int_0^l x J_\nu^2(k_i^{(\nu)}x)\,dx = \frac{l^2}{2}J^2_{\nu+1}(k_i^{(\nu)}l),$$

当$k_i^{(\nu)} \neq k_j^{(\nu)}$时

$$\int_0^l x J_\nu(k_i^{(\nu)}x) J_\nu(k_j^{(\nu)}x)\,dx = 0 .$$

设$k_1^{(\nu)}$，$k_2^{(\nu)}$，…，是方程$J_\nu(lx)=0$的正根，则函数系 $J_\nu(k_1^{(\nu)}x)$，$J_\nu(k_2^{(\nu)}x)$，…，在区间（0，$l$）上是完备系．零点的渐近公式是

$$k_j^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi\nu}{2} + j\pi.$$

且$J_\nu(x)$和$J_{\nu+1}(x)$的正零点两两相间，即在$J_\nu(x)$的两个邻接正零点之间有一个而且只有一个$J_{\nu+1}(x)$的零点，反之亦然．对负值零点也有同样的结论．

函数$J_\nu(x)$的最小正零点较$J_{\nu+1}(x)$的最小正零点更和原点接近些．

**8.可以化为**Bessel**方程的方程**

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2\beta+1}{x}\frac{dy}{dx}+b^2y=0,$$

令 $y=x^{-\beta}u(x)$，则 $u(x)$ 满足

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\left(b^2-\frac{\beta^2}{x^2}\right)u=0.$$

若令 $x=b^{-1}t$，则

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{du}{dt}+\left(1-\frac{\beta^2}{t^2}\right)u=0.$$

在Bessel方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)y=0$$

中令 $y=t^{-\frac{1}{2}}W(2it)$，记 $\xi=2it$，得

$$\frac{d^2W}{d\xi^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{\xi^2}\right)W(\xi)=0.$$

这是惠泰克方程的特殊情形：$k=0$，$m=\nu^2$。

令 $y=t^{\nu}e^{-\frac{\xi}{2}}u(\xi)$，$\xi=2it$，得

$$\xi\frac{d^2u}{d\xi^2}+(2\nu+1-\xi)\frac{du}{d\xi}-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u(\xi)=0.$$

这是库末方程的特殊情形：$\alpha=\nu+\frac{1}{2}$，$r=2\nu+1=2\alpha$。

**9.虚变元的Bessel函数**

对于常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0,$$

其中$x$是实数，令$Z=ix$，上述方程即化为$\nu$阶Bessel方程，因此，当$\nu$不是整数时，它有两个线性无关解$J_{\pm\nu}(ix)$。为简便计，引入虚变元Bessel函数$I_\nu(x)$

$$I_\nu(x)=e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}J_\nu\left(xe^{\frac{\pi i}{2}}\right)\quad\left(-\pi<\arg x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$=e^{\frac{3\nu\pi i}{2}}J_\nu\left(xe^{-\frac{3\pi i}{2}}\right)\quad\left(\frac{\pi}{2}<\arg x\leqslant\pi\right),$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

在

$$J_\nu(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{ix\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta d\theta$$

中令$ix$为$x$，得到（相差一个常数）

$$I_\nu(x)=x^\nu\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta d\theta.$$

类似可得$I_\nu(x)$的渐近展开式

$$I_\nu(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-n\right)}(2x)^{-n}$$

$$+\frac{e^{-x+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-n\right)}(2x)^{-n}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\arg x<\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$I_\nu(x)\sim\frac{e^{x}}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-n\right)}(2x)^{-n}$$

$$+\frac{e^{-x-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+n\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-n\right)}(2x)^{-n}$$

$$\left(-\frac{3\pi}{2}<\arg x<\frac{\pi}{2}\right).$$

成立下面的递推式

$$I_{\nu-1}-I_{\nu+1}=\frac{2\nu}{x}I_\nu,\quad I_{\nu-1}+I_{\nu+1}=2I'_\nu,$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m(x^\nu I_\nu)=x^{\nu-m}I_{\nu-m},\quad \left(\frac{d}{xdx}\right)^m(x^{-\nu}I_\nu)=x^{-\nu-m}I_{\nu+m}.$$

特别有：$I'_0=I_1$，$I_{-n}=I_n$。

# 二、Fuchs理论的简单知识

## §1　二阶线性常微分方程的正则奇点

### 1.微分方程的正则奇点

考虑二阶常微分方程

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0. \tag{1.1}$$

其中$u$是未知函数，$p$，$q$是系数．假设在复域$D$中某一点，$c$是函数$p(z)$和$q(z)$的极点，其阶数使$(z-c)p(z)$和$(z-c)^2q(z)$在$c$点解析，则称$c$为方程的正则奇点．反之，函数$p(z)$和$q(z)$的其它极点称为非正则奇点．

如果$c$是正则奇点，则方程(1.1)可以写为如下形式

$$(z-c)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(z-c)p(z-c)\frac{du}{dz}+Q(z-c)u=0. \tag{1.2}$$

其中$p(z-c)$，$Q(z-c)$在$c$点解析，所以若作以$c$点为心，$r$为半径的圆$S_c$，使得在$S_c$内$c$点是方程唯一的奇点，则可将$p(z-c)$，$Q(z-c)$在$S_c$内展成收敛的幂级数

$$p(z-c)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z-c)^n,$$

$$Q(z-c)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(z-c)^n.$$

设方程(1.2)的解呈如下形式

$$u(z)=(z-c)^{\alpha}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right]. \tag{1.3}$$

其中$\alpha$，$a_1$，$a_2$，…是待定的常数．将(1.3)代入(1.2)(假定这些级数允许逐项微商和相乘)得到

$$(z-c)^{\alpha}\left[\alpha(\alpha-1)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)(z-c)^n\right]$$

$$+ (z-c)^{\alpha} p(z-c)\left[\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha + n)(z-c)^n\right]$$

$$+ (z-c)^{\alpha} Q(z-c)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n\right] = 0 .$$

然后再将$p(z-c)$，$Q(z-c)$的级数表达式代入相乘得到

$$(z-c)^{\alpha}\left\{\alpha(\alpha-1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)(z-c)^n\right.$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha p_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left[a_m(\alpha+m)p_{n-m}\right](z-c)^n$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(a_m q_{n-m})(z-c)^n\right\} = 0 .$$

令$z-c$的各次幂的系数等于零，则得

$$\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0 ,$$

$$a_1\{(\alpha+1)^2 + (p_0-1)(\alpha+1) + q_0\} + \alpha p_1 + q_1 = 0 ,$$

……

$$a_n\{(\alpha+n)^2 + (p_0-1)(\alpha+n) + q_0\} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m[(\alpha+m)$$

$$p_{n-m} + q_{n-m}] + \alpha p_n + q_n = 0 ,$$

……

以及

$$(z-c)^{\alpha}\left\{\alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n[(\alpha+n)^2\right.\right.$$

$$+(p_0-1)(\alpha+n)+q_0]+\sum_{m=1}^{n-1}a_m[(\alpha+m)p_{n-m}+q_{n-m}]$$

$$+\alpha p_n+q_n\Big\}(z-c)^n\Big\}=0.$$

关系式

$$F(\alpha)\equiv\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0=0 \tag{1.4}$$

称为指数方程。它的两个根（可能是相等的）称为指数。设$\rho_1$和$\rho_2$是$F(\alpha)=0$的两个根，取定$\alpha$为$\rho_1$，$\rho_2$中之一后，只要$F(\alpha+n)$不为零($n=1,2,\cdots$),则可唯一地确定$a_1$，$a_2,\cdots$，$a_n$，$\cdots$。换言之，如果$\alpha=\rho_1$,则$\rho_2$不能是$\rho_1+1,\rho_1+2,\cdots,\rho_1+n,\cdots$中之一；如果$\alpha=\rho_2$，则$\rho_1$不能是$\rho_2+1,\rho_2+2,\cdots,\rho_2+n,\cdots$中之一。由此可见，若指数差$\rho_1-\rho_2$不等于零或正整数，则恒可得到两个级数

$$(z-c)^{\rho_1}[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n],$$

$$(z-c)^{\rho_2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}a'_n(z-c)^n].$$

它们形式上满足方程。下面证明它们的收敛性。

设$\rho_1\neq\rho_2$，且$\rho_1$是实部较大的一个。令$\rho_1-\rho_2=k$。显然应有关系式

$$F(\rho_1+n)=n(k+n).$$

由于$p(z-c)$和$Q(z-c)$的解析性，我们可以求得不依赖于$n$的正数$M$，使得$|p_n|<Mr^{-n}$，$|q_n|<Mr^{-n}$，$|\rho_1p_n+q_n|<Mr^{-n}$。为方便起见，选取$M\geq1$。显然

$$|a_1| \leqslant \frac{|p_1\rho_1 + q_1|}{|F(\rho_1+1)|} < \frac{M}{r(k+1)} < \frac{M}{r}.$$

假定

$$|a_{n-1}| < \left(\frac{M}{r}\right)^{n-1}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

则

$$|a_n| \leqslant \frac{\left|\sum_{m=1}^{n-1} a_m(\rho_1+m) p_{n-m} + q_{n-m}\right| + |\rho_1 p_n + q_n|}{|F(\rho_1+n)|}$$

$$\leqslant \frac{\sum_{m=1}^{n-1} |a_m||\rho_1 p_{n-m} + q_{n-m}| + \sum_{m=1}^{n-1} m|a_m||p_{n-m}| + Mr^{-n}}{|n(k+n)|}$$

$$\leqslant \frac{r^{-n}\sum_{m=0}^{n-1} M^{m+1} + r^{-n}\sum_{m=1}^{n-1} mM^{m+1}}{|n(k+n)|}$$

$$\leqslant \frac{M^n}{r^n} \frac{n + \frac{(n-1)n}{2}}{|n(k+n)|} = \frac{M^n}{r^n} \frac{n(n+1)}{2n(k+1)}$$

$$= \frac{M^n}{r^n} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left|1+\frac{k}{n}\right|} \leqslant \frac{M^n}{r^n}.$$

于是按归纳法，$|a_n| < M^n r^{-n}$对所有的$n$成立。这就证明了级数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

当$|z-c|<\frac{r}{M}$时是一致收敛的，即是一解析函数。

完全类似地可证

$$|a'_n|<M^n l^n r^{-n}.$$

其中 $l$ 是$|1-k|^{-1}$，$|1-\frac{k}{2}|^{-1}$，…，$|1-\frac{k}{n}|^{-1}$，… 的上界。

当$K$不为正整数时，这个界是存在的（因为$\frac{k}{n}$越来越小，总在前面有限个中找到上界）。因

$$|a'_1|<\frac{M}{r|1-k|},$$

设

$$|a'_{n-1}|<M^{n-1}l^{n-1}r^{-n-1},$$

则

$$|a'_n|<\frac{M^n}{r^n}\frac{l^{n-1}n(n+1)}{2|n(n-k)|}=\frac{M^n l^{n-1}}{r^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\times\left|1-\frac{k}{n}\right|^{-1}\leqslant\frac{M^n l^n}{r^n}$$

这就证明了级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(z-c)^n$$

当$|z-c|<\frac{r}{Ml}$时是一致收敛的。至于满足方程是显然的。

于是我们得到了在正则奇点 $c$ 邻域内的基本解系

$$u_1(z)=(z-c)^{\rho_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right],$$

$$u_2(z)=(z-c)^{\rho_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(z-c)^n\right].$$

如果$\rho_1-\rho_2$不是正整数或零，根据解延拓的理论，如方程的所有正则奇点都在$D$内，则基本解系的两个解除去奇点外可以进行开拓，因而除奇点外都是解析的，只有奇点是解的歧点。

如果$\rho_1-\rho_2$是正整数或零，则相应于指数$\rho_2$的解$u_2(z)$没有意义或与$u_1(z)$相同。此时在奇点的邻域内另一解的形式是什么呢？

令$u=u_1(z)\zeta$，则

$$u'=u_1\zeta'+u_1'\zeta,\quad u''=u_1\zeta''+2u_1'\zeta'+u_1''\zeta.$$

于是新的未知函数$\zeta$满足方程

$$u_1(z)\left[(z-c)^2\frac{d^2\zeta}{dz^2}+(z-c)p(z-c)\frac{d\zeta}{dz}\right.$$

$$\left.+2(z-c)^2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}\frac{d\zeta}{dz}\right]+\zeta[(z-c)^2u_1''(z)$$

$$+(z-c)p(z-c)u_1'(z)+Q(z-c)u_1(z)]=0.$$

即

$$(z-c)^2\frac{d^2\zeta}{dz^2}+\left[(z-c)p(z-c)+2(z-c)^2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}\right]\frac{d\zeta}{dz}$$

$$=0,\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)=\left[-2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}-\frac{p(z-c)}{z-c}\right]\frac{d\zeta}{dz},$$

$$\ln\frac{d\zeta}{dz}=-2\ln u_1(z)+\ln\exp\left[-\int^z\frac{p(z-c)}{z-c}dz\right]+\ln B,$$

$$\frac{d\zeta}{dz}=B\frac{1}{u_1^2(z)}\exp\left[-\int^z\frac{p(z-c)}{z-c}dz\right],$$

$$\zeta=A+B\int^z\frac{1}{u_1^2(z)}\exp\left[-\int^z\frac{p(z-c)}{z-c}dz\right]dz$$

$$=A+B\int^z\frac{(z-c)^{-p_0}}{u_1^2(z)}\exp\left[-p_1(z-c)-\frac{1}{2}p_1(z-c)^2\cdots\right]dz$$

$$=A+B\int^z(z-c)^{-p_0-2\rho_1}g(z)dz.$$

其中$A$、$B$是任意常数，而$g(z)$是在以$c$点为心的圆内的解析函数，此圆内不包含函数$p(z-c)$的奇点以及函数$(z-c)^{-\rho_1}u_1(z)$的奇点和零点，此外$g(c)=1$。令

$$g(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(z-c)^n.$$

如果$K\neq 0$，则

$$\xi=A+B\int^z\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(z-c)^n\right](z-c)^{-k-1}dz$$

$$=A+B\left[-\frac{1}{k}(z-c)^{-k}-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{g_n}{k-n}(z-c)^{n-k}+g_k\ln(z-c)\right.$$

$$\left.+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{g_n}{n-k}(z-c)^{n-k}\right]\text{（因}p_0=1-\rho_1-\rho_2\text{）}.$$

因此，方程（1．2）在$S_0$内（除去$c$点外）的一般解为

$$Au_1(z)+B[g_k u_1(z)\ln(z-c)^n+a(z)]. \tag{1.5}$$

其中

$$a(z)=(z-c)^{\rho_2}\left[-\frac{1}{k}-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n(z-c)^n\right].$$

而系数$\bar{a}_n$是常数。

如果$k=0$，则相应的解取如下形式

$$Au_1(z)+B\left[u_1(z)\ln(z-c)+(z-c)\rho_2\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n(z-c)^n\right]. \tag{1.6}$$

在方程的正则奇点的适当邻域内所得到的解，都称为正则积分。

**2.无穷远点**

无穷远点是方程的普通点还是正则奇点应如何判断呢？这只要作变换$z=\dfrac{1}{z_1}$后，看对$z_1$的方程中$z_1=0$是普通点还是正则奇点即可。

令$z=\dfrac{1}{z_1}$，则方程（1．1）变为

$$z_1^4\frac{d^2u}{dz_1^2}+\left[2z_1^3-z_1^2\phi\left(\frac{1}{z_1}\right)\right]\frac{du}{dz_1}+q\left(\frac{1}{z_1}\right)u=0. \tag{1.1'}$$

由此可以看出，$z_1=0$（$z=\infty$）为普通点的条件是$2z-z^2p(z)$和$z^4q(z)$在无穷远点解析；$z_1=0$（$z=\infty$）为正则奇点的条件是$2-zp(z)$（即$zp(z)$）和$z^2q(z)$在无穷远点解析。

## §2 Fuchs型方程

**1.定义**

**一个二阶线性微分方程（1．1），如果它所有的奇点（包括无穷远点）都是正则奇点，则称之为Fuchs型方程。**

由于$p(z)$和$q(z)$在无穷远处应为零，并且对任何有限$z$至多具有一阶和二阶的极点，所以$p(z)$和$q(z)$是有理函数。故若记$a_1$，$a_2$，…，$a_n$为（1．1）的$n$个有限的正则奇点时，一个Fuchs方程必取如下形式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{p(z)}{R_n(z)}\frac{du}{dz}+\frac{Q(z)}{R_n^2(z)}u=0. \tag{2.1}$$

其中$R_n(z)=(z-a_1)\cdots(z-a_n)$。根据前面所述关于无穷远点为正则奇点和解析点的判定条件，当无穷远点为解析点时，$p(z)$为$n-1$次多项式，且$z^{n-1}$的系数为2，$Q(z)$为$2n-4$次多项式。

**2．Fuchs关系**

对于奇点$a_h(h=1,\cdots,n)$，其指数方程为

$$\alpha(\alpha-1)+\frac{p(a_h)}{R_n^1(a_h)}\alpha+\frac{Q(a_h)}{[R_n'(a_h)]^2}=0. \tag{2.2}$$

设（2．2）的二根为$\alpha_1^{(h)}$、$\alpha_2^{(h)}$，显然

$$\alpha_1^{(h)}+\alpha_2^{(h)}=1-\frac{p(a_h)}{R_n'(a_h)}. \tag{2.3}$$

若无穷远点为正则奇点，则相应于无穷远点的指数方程为

$$\alpha(\alpha-1)+(2+\lambda)\alpha+\mu=0.$$

其中$\lambda=-\lim\limits_{z\to\infty}zp(z)$； $\mu=\lim\limits_{z\to\infty}z^2q(z)$．记相应的工根为$\alpha_1^{(\infty)}$，$\alpha_2^{(\infty)}$，则

$$\alpha_1^{(\infty)}+\alpha_2^{(\infty)}=-(1+\lambda). \tag{2.4}$$

由（2．3）和（2．4）得

$$\sum_{h=1}^{n}[\alpha_1^{(h)}+\alpha_2^{(h)}]+\alpha_1^{(\infty)}+\alpha_2^{(\infty)}$$

$$=n-1-\left[\sum_{h=1}^{n}\frac{p(a_h)}{R_n'(a_h)}+\lambda\right].$$

因为$p(a_h)/R_n'(a_h)$是函数$p(z)$在$a_h$点的残数，$\lambda$是$p(z)$在无穷远点的残数，根据残数定理，所有残数之和为零，即

$$\sum_{h=0}^{n}\frac{p(a_h)}{R_n'(a_h)}+\lambda=0.$$

于是得到关系式

$$\sum_{h=1}^{n}(\alpha_1^{(h)}+\alpha_2^{(h)})+\alpha_1^{(\infty)}+\alpha_2^{(\infty)}=n-1. \tag{2.5}$$

称之为Fuchs关系式。

若无穷远点为普通点，由于$2z-z^2p(z)$在$z=\infty$解析，可算出$p(z)$在无穷点的残数为$-2$，于是相应的Fuchs关系式为

$$\sum_{h=1}^{n}(\alpha_1^{(h)}+\alpha_2^{(h)})=n-2. \tag{2.6}$$

### 3．Riemann方程及其性质

最简单可积的Fuchs 型方程是具有三个正则奇点的方程，称

之为Riemann方程．设这三个奇点为 $a$， $b$， $c$，无穷远点为普通点，则方程的一般形式为

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2z^2+l_1z+l_2}{(z-a)(z-b)(z-c)}\frac{du}{dz}$$

$$+\frac{m_1z^2+m_2z+m_3}{[(z-a)(z-b)(z-c)]^2}u=0. \tag{2.7}$$

由此可见，此类方程由五个参数确定．下面我们证明，方程(2.7)由给定的奇点 $a$， $b$， $c$ 和相当的指数方程的根 $\alpha$， $\alpha'$； $\beta$， $\beta'$； $\gamma$， $\gamma'$ 唯一确定．这三对根满足Fuchs关系

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

将（2.7）的系数写成部分分式

$$\frac{2z^2+l_1z+l_2}{(z-a)(z-b)(z-c)}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\frac{c}{z-c},$$

$$\frac{m_1z^2+m_2z+m_3}{(z-a)(z-b)(z-c)}=\frac{A'}{z-a}+\frac{B'}{z-b}+\frac{C'}{z-c}.$$

我们来确定常数 $A$， $B$， $C$； $A'$， $B'$， $C'$．

由于

$$\lim_{z\to a}(z-a)p(z)=A,\quad \lim_{z\to a}(z-a)^2=\frac{A'}{(a-b)(a-c)}.$$

所以对应于 $z=a$ 的指数方程为

$$\alpha(\alpha-1)+A\alpha+\frac{A'}{(a-b)(a-c)}=0.$$

从而

$$\alpha+\alpha'=1-A,\quad \alpha\alpha'=\frac{A'}{(a-b)(a-c)}.$$

类似地有

$$\beta+\beta'=1-B,\ \beta\beta'=\frac{B'}{(b-a)(b-c)},$$

$$\gamma+\gamma'=1-C,\ \gamma\gamma'=\frac{C'}{(c-a)(c-b)}.$$

于是方程（2．7）可以写为如下形式（Papperitz形式）．

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{du}{dz}$$

$$+\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{z-b}\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}\frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0. \quad (2.8)$$

称六个数 $\alpha$，$\alpha'$；$\beta$，$\beta'$；$\gamma$，$\gamma'$ 为方程（2.8）的特征数．满足（2.8）的任一函数称为Riemann $p$-函数，记为

$$u=p\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}. \quad (2.8')$$

注意它所表示的不是一个函数，而是Riemann方程解的整个一类．

完全类似地，可以化具有三个正则奇点$a$，$b$，$\infty$的Riemann方程为如下形式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}\right\}\frac{du}{dz}+\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)}{z-a}\right.$$

$$+\frac{\beta\beta'(b-a)}{z-b}+\gamma\gamma'\Big\}\times\frac{u}{(z-a)(z-b)}=0. \quad (2.9)$$

其中$\alpha$，$\alpha'$；$\beta$，$\beta'$；$\gamma$，$\gamma'$是关于奇点$a$，$b$，$\infty$的指数方程的根。

Riemann方程（2.8）具有两个重要的性质

1°.在自变数的分式线性变换

$$z_1=\frac{\lambda z+\mu}{\nu z+\tau},\ \lambda\tau\neq\mu\nu$$

下，$u$关于新变数的方程仍为Riemann方程，且$p$-函数之间具有关系

$$p\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=p\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

其中$a_1$，$b_1$，$c_1$是对应于$z$取值$a$，$b$，$c$时$z_1$所取的值。

2°.在未知函数变换

$$u_1=(z-a)^{\lambda}(z-b)^{\mu}(z-c)^{\nu}u$$

下，仍变为Riemann方程，且$p$-函数之间具有关系式

$$p\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

$$=(z-a)^{-\lambda}(z-b)^{-\mu}(z-c)^{-\nu}$$

$$\times p\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+\lambda & \beta+\mu & \gamma+\nu & z \\ \alpha'+\lambda & \beta'+\mu & \gamma'+\nu & \end{Bmatrix}. \quad (2.11)$$

根据Fuchs关系，显然

$\lambda+\mu+\nu=0$.

特别当 $c$ 为无穷远点时，使Riemann方程不变的未知函数变换为 $u_1=(z-a)^{\lambda}(z-a)^{\mu}u$，其中 $\lambda$，$\mu$ 可取任意值。

3°. Riemann方程（2.8）和 $p$-函数（2.8′）中的 $\alpha$ 与 $\alpha'$，$\beta$ 与 $\beta'$，$\gamma$ 与 $\gamma'$ 的位置可以互换，$a$，$b$，$c$ 也可互换位置。

**4.超几何方程，化三个正则奇点的Riemann方程为超几何方程**

一个Riemann方程当其Riemann $p$-函数为

$$p\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}.$$

时，其方程应为

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0.$$

这就是超几何方程。可见超几何方程是Riemann方程的一个特殊情形。

下面我们证明，任何一个具有三个正则奇点的Riemann方程都可以化为超几何方程。事实上，先作未知函数变换

$$u_1=(z-a)^{-\alpha}(z-b)^{-\mu}(z-c)^{\alpha+\mu}u$$

则 $p$-函数之间有关系式

$$p\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

$$=\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}p\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{Bmatrix}.$$

因解乘上任意常数后仍是解，乘以因子$(-c)^{\alpha+\beta}$，然后让$c\to\infty$，取极限即得

$$p\begin{Bmatrix} a & b & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

$$=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}p\begin{Bmatrix} a & b & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{Bmatrix},$$

再作自变数变换

$$z_1=\frac{z-a}{b-a}.$$

则$z=a$，$b$，$\infty$即变为0，1，$\infty$，而得

$$p\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

$$=z_1^{\alpha}(1-z_1)^{\beta}p\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & z_1 \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{Bmatrix}.$$

令

$$\gamma+\alpha+\beta=\alpha^*,\quad \gamma'+\alpha+\beta=\beta^*,\quad 1+\alpha-\alpha'=\gamma^*.$$

则$u_1(z_1)$适合的方程的Riemann $p$-函数为

$$p\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha^* & z_1 \\ 1-\gamma^* & \gamma^*-\alpha^*-\beta^* & \beta^* & \end{Bmatrix}$$

其方程为

$$z_1(1-z_1)\frac{d^2u}{dz_1^2}+[\gamma^*-(\alpha^*+\beta^*+1)z_1]\frac{du}{dz_1}-\alpha^*\beta^*u=0.$$

这就是超几何方程。

## §3 超几何方程

### 1.在正则奇点0，1，∞附近的线性独立解

已知超几何方程

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)]\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0. \tag{3.1}$$

的$p$-函数为

$$p\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix},$$

与三个奇点0，1，∞对应的三对指数分别为0，$1-\gamma$；0，$\gamma-\alpha-\beta$和$\alpha$，$\beta$．因此，如果$\gamma$，$\gamma-\alpha-\beta$，$\alpha-\beta$不是整数时，方程（3．1）在0，1，∞三点附近应各有三对独立解

$$z=0,\ u_1=p_1(z),\ u_2=z^{1-\gamma}p_2(z). \tag{3.2}$$

$$z=1,\ u_3=p_3(1-z),\ u_4=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}p_4(1-z). \tag{3.3}$$

$$z=\infty,\ u_5\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}p_5\left(\frac{1}{z}\right),\ u_6=\left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}p_6\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.4}$$

其中$p_1$，$p_2$，…，$p_6$都是收敛的幂级数。下面我们将这些幂级数具体写出来。

将级数$u_1(z)=p_1(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$代入方程（3.1），得到

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z^{n-1}-z^n)+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma n a_n z^{n-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+\beta+1)n a_n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\beta a_n z^n=0.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n a_{n+1}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\gamma(n+1)a_{n+1}z^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n z^n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+\beta+1)n a_n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\beta a_n z^n=0.$$

因此应有

$$\gamma a_1-\alpha\beta a_0=0,$$

$$2(\gamma+1)a_2-(\alpha+1)(\beta+1)a_1=0,$$

……

$$(\gamma+n)(n+1)a_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)a_n=0.$$

……

即

$$a_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma}a_0,$$

$$a_{n+1}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)}\qquad \gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$$

从而如取$a_0=1$，则

$$a_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)}$$

$$=\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}}.$$

所得到的对应解为

$$u_1(z)=F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n. \qquad (3.5)$$

这就是所谓的超几何级数。因为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

当 $n\to\infty$ 时趋于1，故当 $|z|<1$ 时级数收敛，所以 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 在单位圆内代表一个解析函数。最早是Euler在研究建立一种级数，使得它的特殊情形就代表初等函数（如 $\frac{1}{1-z}$，$(1+z)^m$，$\ln(1+z)$ 等）的级数时，引出级数（3.5）。事实上

$$F(-m, \beta, \beta, -z)=(1+z)^m,$$

$$F(1, \beta, \beta, z)=\frac{1}{1-z},$$

$$zF(1, 1, 2, -z)=\ln(1+z),$$

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(1, \beta, 1, \frac{z}{\beta}\right)=e^z,$$

$$F(\alpha, \beta, \beta, z)=(1-z)^{-\alpha}.$$

求出级数 $p_1$ 后，其余的五个级数 $p_2, \cdots, p_6$ 就不必逐一地直接

去求，而都可藉助超几何级数表示。

根据前述Riemann方程的性质3°

$$p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}$$

$$= z^{\alpha}(1-z)^{\beta}\, p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & z \\ \alpha'+\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{matrix}\right\},$$

$$p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha' & \beta & \gamma & z \\ \alpha & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}$$

$$= z^{\alpha'}(1-z)^{\beta}\, p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha'+\beta & z \\ \alpha-\alpha' & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha'+\beta & \end{matrix}\right\},$$

上面两式的左端是相等的，因此

$$p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{matrix}\right\}$$

$$= z^{\alpha'-\alpha}\, p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha'+\beta & z \\ \alpha-\alpha' & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha'+\beta & \end{matrix}\right\}.$$

或者仍采用记号

$$\alpha^{*}=\gamma+\alpha+\beta,\quad \beta^{*}=\gamma'+\alpha+\beta,\quad \gamma^{*}=1+\alpha-\alpha'.$$

则有

$$p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha^* & z \\ 1-\gamma^* & \gamma^*-\alpha^*-\beta^* & \beta^* & \end{matrix}\right\}$$

$$=z^{\gamma-\gamma^*}p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha^*-\gamma^*+1 & z \\ \gamma^*-1 & \gamma^*-\alpha^*-\beta^* & \beta^*-\gamma^*+1 & \end{matrix}\right\}.$$

这表明（3.1）有另一特解

$$u_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z). \qquad (3.6)$$

即

$$p_2(z)=F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z).$$

只要$\gamma$不等于零或正负整数时（当$\gamma=0,\ -1,\ -2,\cdots$时，(3.5)无意义；当$\gamma=1$时，（3.5）与（3.6）重合；当$\gamma=2,3,\cdots$时，（3.6）无意义），（3.5）与（3.6）构成方程（3.1）在正则奇点$z=0$附近的两个线性无关的独立解。

如果将$\beta$与$\beta'$交换位置，得到

$$p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{matrix}\right\}$$

$$=(1-z)^{\beta'-\beta}p\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta' & z \\ \alpha'-\alpha & \beta-\beta' & \gamma'+\alpha+\beta' & \end{matrix}\right\}.$$

同样令

$$\alpha^*=\gamma+\alpha+\beta,\quad \beta^*=\gamma'+\alpha+\beta,\quad \gamma^*=1+\alpha-\alpha'.$$

得到

$$p\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha^* & z \\ 1-\gamma^* & \gamma^*-\alpha^*-\beta^* & \beta^* & \end{Bmatrix}$$

$$=(1-z)^{\gamma^*-\alpha^*-\beta^*}p\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma^*-\beta^* & z \\ 1-\gamma^* & \alpha^*+\beta^*-\gamma^* & \gamma^*-\alpha^* & \end{Bmatrix}.$$

可见$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z)$是(3.1)在$z=0$附近的又一解，因而存在常数$A$，$B$，使得，

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z)$$
$$=AF(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)+Bz^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)$$

上式左端可以展成$z$的幂级数，而右端有如下形式

$$A[1+0(z)]+Bz^{1-\gamma}[1+0(z)].$$

所以必须有$A=1$，$B=0$。从而得出一个重要的关系式

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z). \tag{3.7}$$

这样一来就给出了函数$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$当$\gamma$不等于0，$-1$，$-2$，…时用幂级数表示的新方法。

为了求出在$z=1$附近的解，只须作变换$z=1-z_1$，则(3.1)变为

$$z_1(1-z_1)\frac{d^2u}{dz_1^2}+[-\gamma+(\alpha+\beta+1)(1-z_1)]\frac{du}{dz_1}-\alpha\beta u$$
$$=0.$$

即

$$z_1(1-z_1)\frac{d^2u}{dz_1^2}+[\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{du}{dz_1}-\alpha\beta u$$
$$=0.$$

因此，在 $z=1$ 附近有解

$$u_3=F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-z). \tag{3.9}$$

$$u_4=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ 1-\alpha-\beta+\gamma,\ 1-z). \tag{3.10}$$

其中 $\gamma-\alpha-\beta$ 不等于整数。

同样，要求奇点 $z=\infty$ 附近的解，只须先作代换 $z=\dfrac{1}{z_1}$，再令 $u=z_1{}^{\lambda}\bar{u}$，则方程(3.1) 化为

$$z_1(1-z_1)\frac{d^2\bar{u}}{dz_1{}^2}+[(2\lambda-\alpha-\beta+1)-(2\lambda-\gamma+2)z_1]\frac{d\bar{u}}{dz_1}$$

$$+\left\{\frac{\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta}{z}-\lambda(\lambda-\gamma+1)\right\}\bar{u}=0.$$

因此，只有 $\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$，即 $\lambda=\alpha$ 或 $\lambda=\beta$ 时才可能化为超几何方程。当 $\lambda=\alpha$ 时有

$$z_1(1-z_1)\frac{d^2\bar{u}}{dz_1{}^2}+[(\alpha-\beta+1)+(2\alpha-\gamma+2)z_1]\frac{d\bar{u}}{dz_1}$$

$$-\alpha(\alpha-\gamma+1)\bar{u}=0.$$

当 $\lambda=\beta$ 时有

$$z_1(1-z_1)\frac{d^2\bar{u}}{dz_1{}^2}+[(\beta-\alpha+1)-(2\beta-\gamma+2)z_1]\frac{d\bar{u}}{dz_1}$$

$$-\beta(\beta-\gamma+1)\bar{u}=0.$$

因此，在无穷远点附近有两个独立的解

$$u_5=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right). \tag{3.11}$$

$$u_6 = z^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right). \quad (3.12)$$

如果再考虑 0，1，∞三点互换的其它变换 $z=\frac{1}{1-z_1}$，$z=\frac{z_1-1}{z_1}$，$z=\frac{z_1}{z_1-1}$，还可以得到(3.1) 的如下特解

$$u_7 = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{1-z}\right),$$

$$u_8 = (1-z)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{1-z}\right),$$

$$u_9 = z^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ \frac{z-1}{z}\right),$$

$$u_{10} = z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$u_{11} = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \frac{z}{z-1}\right),$$

$$u_{12} = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1,\ 1-\beta,\ 2-\gamma, \frac{z}{z-1}\right).$$

**2.超几何函数的解析延拓公式**

上述特解$u_1, u_2, \cdots, u_{12}$ 都只是在某一圆内有定义，这一段我们讲它们的解析延拓公式．为此，先引进超几何级数的积分表达式．

假设$\mathrm{Re}\gamma > \mathrm{Re}\beta > 0$．因为

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)},$$

而

$$\int_0^1 t^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt = B(\beta+n, \gamma-\beta)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)}.$$

所以

$$\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt.$$

代入到超几何级数中

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}z^n\int_0^1 t^{\beta+n-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}(tz)^n dt$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt. \tag{3.13}$$

由$F$的积分表达式可得到$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$的值. 设$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$, $\mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\beta>0$, 则在(3.13)式中令$z\to 1-0$得

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$$

$$= \lim_{z\to 1-0} F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}B(\beta,\ \gamma-\alpha-\beta)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}. \tag{3.14}$$

利用超几何级数的积分表达式可以将$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$表为另一种形式．在（3.13）中，令$s=1-t$，则得

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^1 s^{\gamma-\beta-1}(1-s)^{\beta-1}(1-z+sz)^{-\alpha}ds$$

$$=(1-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^1 s^{\gamma-\beta-1}$$

$$\times(1-s)^{\beta-1}\left(1-\frac{z}{z-1}s\right)^{-\alpha}ds$$

$$=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \frac{z}{z-1}\right).$$

即

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}\right). \tag{3.15}$$

上式左端是在单位圆$|z|<1$内有定义，而右端是在$\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$，即在半平面$\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}$内有定义，因此可以认为（3.15）式是解析函数$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$由单位圆到$\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}$的解析延拓公式．

利用α、β的对称性又得

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-z)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{z}{z-1}\right). \tag{3.16}$$

$u_1$, …, $u_{12}$等对解都是定义在不同区域内的，但是其中有些解中又有相交的定义区域，根据二阶线性方程的理论，任何三个特解之间必存在一个线性关系，由此可以导出超几何函数的一些解析延拓公式。例如$u_1$与$u_3$，$u_4$之间必有一个线性关系，即

$$\begin{aligned}&F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)\\&=AF(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-z)+B(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\\&\quad\times F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ 1-\alpha-\beta+\gamma,\ 1-z).\end{aligned}$$

$$\gamma-\alpha-\beta\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

为了确定常数$A$，$B$，假设$\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<\mathrm{Re}\,\gamma<1$，令$z\to 1-0$，得

$$A=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

令$z\to 0^+$得

$$A\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}$$

$$+B\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}=1$$

由Γ－函数的余元关系式

$$F(x)F(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi},$$

得

$$A\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}$$

$$=A\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$=A\frac{\sin(\gamma-\alpha)\pi\sin(\gamma-\beta)\pi}{\sin\gamma\pi\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi},$$

$$B\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$$

$$=B\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma)}\frac{\sin\alpha\pi\ \sin\gamma\pi}{\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi\ \sin\gamma\pi}.$$

而

$$B\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}=1-A\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}$$

$$=1+\frac{\sin(\gamma-\alpha)\pi\sin(\gamma-\beta)\pi}{\sin\gamma\pi\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi},$$

所以

$$B\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma)}=1,$$

因此

$$B=\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

这样，得到了$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$由单位圆到$|1-z|<1$的解析延拓公式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z)$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

$$\times F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ 1-\alpha-\beta+\gamma,\ 1-z). \tag{3.17}$$

在（3.15）的右端利用公式（3.17），则得$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$在$|1-z|>1$内的解析延拓公式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{-\alpha}$$

$$\times F\left(\alpha,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1,\frac{1}{1-z}\right)+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\beta}$$

$$\times F\left(\gamma-\alpha,\beta,\beta-\alpha+1,\frac{1}{1-z}\right).$$

$$\alpha-\beta\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots \tag{3.18}$$

在（3.18）的两端分别利用（3.15），（3.16），则得$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$在$|z|>1$的解析延拓公式

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}(-z)^{-\alpha}$$

$$\times F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right)+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$\times(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right).$$

$$\alpha-\beta\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots \tag{3.19}$$

在（3.15）的右端利用（3.17），可得超几何函数

$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, z > \frac{1}{2}$ 的解析延拓公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} z^{-\alpha}$$

$$F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{z-1}{z}\right) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{z-1}{z}\right),$$

$$\gamma-\alpha-\beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{3.20}$$

**3. 指数差为整数时超几何方程的特解**

在前面的讨论中，无论是求方程在正则奇点附近的两个线性独立解，还是建立超几何函数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ 的解析延拓公式，我们都避开了指数差为整数的情形，即留下了 $\gamma$，$\gamma-\alpha-\beta=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 的情形．按照Fuchs理论，此时方程(3.1)应有一解含有 $z$ 的对数项．下面我们就来求这种特解．

1°．先考虑 $\gamma=1$ 的简单情形．此时 $u_2(z)$ 无意义，方程(3.1)在奇点 $z=0$ 附近只有一特解 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$，为求另一个含有 $\ln z$ 的项的独立特解，我们采用取极限的方法．

先让 $\gamma=1-\varepsilon$，$\varepsilon$ 是一个任意小的正数，此时方程(3.1)仍以（3.5）和（3.6）为其两个线性独立解．因此

$$\psi_\varepsilon(z) = \frac{z^\varepsilon F(\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon, 1+\varepsilon, z) - F(\alpha, \beta, 1-\varepsilon, z)}{\varepsilon}$$

仍是（3.1）的解，令 $\varepsilon \to 0$，两端取极限得

$$\psi(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(z)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{z^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} F(\alpha + \varepsilon, \ \beta + \varepsilon, \ 1 + \varepsilon, \ z) \right.$$

$$\left. + \frac{F(\alpha + \varepsilon, \ \beta + \varepsilon, \ 1 + \varepsilon, z) - F(\alpha, \ \beta, \ 1 - \varepsilon, z)}{\varepsilon} \right\}$$

$$= F(\alpha, \ \beta, \ 1, \ z) \ln z + \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, \ \beta, \ 1, \ z)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} F(\alpha, \ \beta, \ 1, \ z) + \frac{\partial}{\partial \gamma} F(\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ z)_{\gamma = 1}$$

$$= F(\alpha, \beta, 1, z) \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(n!)^2} z^n. \quad (3.21)$$

其中

$$A_n = \left( \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha + n - 1} \right) + \left( \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{\beta + n - 1} \right)$$

$$- 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

我们还可采用另一种方法来表示$A_n$。对关系式$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$两端取对数然后微商得

$$\frac{\Gamma'(x + 1)}{\Gamma(x + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

因此

$$\frac{1}{\alpha + n - 1} = \frac{\Gamma'(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + n)} - \frac{\Gamma'(\alpha + n - 1)}{\Gamma(\alpha + n - 1)},$$

$$\frac{1}{\alpha + n - 2} = \frac{\Gamma'(\alpha + n - 1)}{\Gamma(\alpha + n - 1)} - \frac{\Gamma'(\alpha + n - 2)}{\Gamma(\alpha + n - 2)},$$

……

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

从而

$$\frac{1}{\alpha}+\cdots+\frac{1}{\alpha+n-1}=\frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)},$$

$$\frac{1}{\beta}+\cdots+\frac{1}{\beta+n-1}=\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}-\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)},$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

于是用$\Gamma$函数表示$A_n$而有

$$A_n=\frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}+\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}-2\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}$$

$$-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}+2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

因为

$$\left[2\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right]F(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z)$$

也是方程的解，所以

$$\mathscr{F}(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z)$$

$$=F(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z)\ln z+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}-2\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}\right]\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}z^n. \quad (3.22)$$

也是方程（3.1）含有对数项 $\ln z$ 的特解，可与（3.19）一样采用。

2°. 再考虑 $\gamma=k\,(k=2,\ 3,\cdots),\ \alpha,\ \beta\neq 0,\ 1,2,\cdots k-1$ 的情形。

为了得到方程（3.1）另一含对数项的解，我们从下式出发

$$\mathscr{F}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)=\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z)$$

$$=\frac{\pi\Gamma(\gamma)}{\sin\pi(1-\gamma)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,\Gamma(\gamma+n)}z^n\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma+n)\Gamma(\beta+1-\gamma+n)}{n!\,\Gamma(2-\gamma+n)}z^{1-\gamma+n}\right]$$

$$=\frac{\pi\Gamma(\gamma)}{\sin\pi(1-\gamma)}[g_1-g_2].\qquad(3.23)$$

当 $\gamma\neq 2,3,\cdots$ 时，$\mathscr{F}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ 显然是方程（3.1）的解。

当 $\gamma\to k\,(k=2,\ 3,\cdots)$ 时，又有

$$\lim_{\gamma\to k}g_1=\lim_{\gamma\to k}g_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(n+k-1)!}z^n.$$

另外

$$\lim_{\gamma\to k}\sin\pi(1-\gamma)=0.$$

所以（3.23）当 $\gamma\to k$ 时是 $\frac{0}{0}$ 的未定式，要用洛比达法则求其极

限。由于

$$\left.\frac{d\sin\pi(1-\gamma)}{d\gamma}\right|_{\gamma=k}=(-1)^k\pi,$$

所以

$$\mathscr{F}(\alpha,\ \beta,\ k,\ z)=(-1)^k\Gamma(k)\left\{\left.\frac{\partial g_1}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=k}-\left.\frac{\partial g_2}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=k}\right\}.$$

而

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=k}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,\Gamma^2(k+n)}\Gamma'(k+n)z^n,$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\left.\frac{\partial g_2}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=k}$$

$$=-\sum_{n=k-1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1-k+n)\Gamma(\beta+1-k+n)}{n!\,\Gamma(2-k+n)}z^{1-k+n}$$

$$\left\{\ln z+\frac{\Gamma'(\alpha+1-k+n)}{\Gamma(\alpha+1-k+n)}+\frac{\Gamma'(\beta+1-k+n)}{\Gamma(\alpha+1-k+n)}\right\}$$

$$+\lim_{\gamma\to k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma+n)\Gamma(\beta+1-\gamma+n)}{n!\,\Gamma^2(2-\gamma+n)}\Gamma'(2-\gamma+n)\,z^{1-\gamma+n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(n+k-1)!\,\Gamma(n+1)}z^n\left\{\ln z+\frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}+\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}\right\}$$

$$+\sum_{n=0}^{k-2}\frac{\Gamma(\alpha+1-k+n)\Gamma(\beta+1-k+n)}{n!}(-1)^{k-n-1}$$

$$(k-n-2)!\,z^{n+1-k}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(n+k-1)!\,\Gamma(n+1)}z^n\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\,\Gamma(n+k)}z^n\left[\ln z+\frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}+\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}\right]+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{(n-1)!\,(1-k)_n}{(1-\alpha)_n(1-\beta)_n\Gamma(k)}z^{-n}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

因此

$$\mathscr{F}(\alpha,\ \beta,\ k,\ z)$$

$$=(-1)^k F(\alpha,\ \beta,\ k,\ z)\ln z+(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(k)_n}$$

$$\times\left[\frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}+\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}-\frac{\Gamma'(n+k)}{\Gamma(n+k)}-\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}\right]z^n$$

$$-(-1)^k\sum_{n=1}^{k-1}\frac{(n-1)!\,(1-k)_n}{(1-\alpha)_n(1-\beta)_n}z^{-n} \tag{3.24}$$

当 $\gamma=-k$，$k=0$，$1,2,\cdots$，$\alpha$，$\beta\neq0$，$-1$，$-2$，$\cdots$ $-k$ 的情形也可类似讨论. 当 $\alpha,\beta=0,-1,-2,\cdots,\gamma$ 时，$u_1$ 退化为多项式. 当 $\alpha$，$\beta=0$，$1$，$2,\cdots,-\gamma-1$ 时，$u_2$ 退化为多项式而有意义.

3°. 前面的解析延拓公式中，我们避开两指数差为整数的情形. 例如当 $\gamma-\alpha-\beta=0$，$\pm1,\pm2,\cdots$时，公式（3.15）无意义. 此时要建立解析延拓公式也仍然要用取极限的方法. 先考虑 $\gamma=\alpha+\beta+k$，$k$ 为正整数的情形. 在（3.17）式中先让 $\gamma\neq\alpha+\beta+k$，然后再令 $\gamma\to\alpha+\beta+k$. 由（3.15）得

$$\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)}{\Gamma(\gamma)}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-z)$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1-\alpha-\beta+\gamma,1-z)$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma)}\right.$$

$$\times F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-z)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma)}$$

$$\times(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1-\alpha-\beta+\gamma,\ 1-z)$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha-\beta)}\right.$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma+n)}(1-z)^n-\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{n!\,\Gamma(1-\alpha-\beta+\gamma+n)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta+n}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{\sin(\gamma-\alpha-\beta)}(g_1-g_2).$$

因为

$$\lim_{\gamma\to\alpha+\beta+k}g_1=\lim_{\gamma\to\alpha+\beta+k}g_2$$

于是，按洛比达法则

$$\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+k,\ z)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}=(-1)^k\left(\frac{\partial g_1}{\partial\gamma}-\frac{\partial g_2}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=\alpha+\beta+k}$$

而

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha+\beta+k}$$

$$= -\frac{\left\{\frac{\Gamma'(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k)}+\frac{\Gamma'(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k)}\right\}}{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,\Gamma(1-k+n)}$$

$$\times(1-z)^n - \lim_{\gamma\to\alpha+\beta+\gamma}\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{\Gamma^2(1+\alpha+\beta-\gamma+n)}\Gamma'(1+\alpha+\beta-\gamma+n)(1-z)^n$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+k)_n(\beta+k)_n}{n!\,(n+k)!}\left[-\frac{\Gamma'(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k)}\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma'(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k)}+\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\right](1-z)^{n+k}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{(k-n-1)!\,(\alpha)_n(\beta)_n}{n!}(1-z)^n,$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha+\beta+k}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+k)_n(\beta+k)_n}{n!\,(n+k)!}(1-z)^{k+n}\left\{\ln(1-z)\right.$$

$$+\frac{\Gamma'(\alpha+k+n)}{\Gamma(\alpha+k+n)}+\frac{\Gamma'(\beta+k+n)}{\Gamma(\beta+k+n)}-\frac{\Gamma'(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k)}$$

$$\left.-\frac{\Gamma'(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k)}-\frac{\Gamma'(1+k+n)}{\Gamma(1+k+n)}\right\},$$

从而得到

$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+k,\ z)$

$$= (-1)^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}(1-z)^k\ln(1-z)$$

$$\times F(\alpha+k,\ \beta+k,\ 1+k, 1-z) + (-1)^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+k)_n(\beta+k)_n}{n!\,(n+k)!}(1-z)^{n+k}\left\{\frac{\Gamma'(\alpha+k+n)}{\Gamma(\alpha+k+n)}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma'(\beta+k+n)}{\Gamma(\beta+k+n)}-\frac{\Gamma'(1+k+n)}{\Gamma(1+k+n)}-\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}\right\}$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+k)}{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\frac{(k-n-1)!\,(\alpha)_n(\beta)_n}{n!}(1-z)^n. \tag{3.26}$$

需要注意的是上式中的$\alpha$，$\beta\neq 0$，$-1$，$-2$，…，否则$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$退化为多项式，而没有延拓的必要性。

在（3.26）中令$z=1-z'$，则得$F(\alpha,\beta,\ \alpha+\beta+k,\ 1-z)$的解析延拓公式。特别当$k=0$时有

$$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta,\ 1-z)$$

$$= -\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}F(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z)\ln z-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}\left[\frac{\Gamma'(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}+\frac{\Gamma'(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)}-2\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}\right]z^n. \tag{3.27}$$

（3.25）与（3.20）比较即得

$$\mathscr{F}(\alpha,\ \beta,\ 1,\ z) = -\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta, 1-z).$$

**4.超几何函数的其它性质**

超几何函数还有其它许多性质，现列举一些有用的如下：

1°. 微分递推公式

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,\ z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ \ z),$$

$$\frac{d^m}{dz^m}F(\alpha,\beta,\ \gamma,z)=\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m}F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+m,z).$$

2°. Kummer公式

$$F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},z\right)=F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+1}{2},\right.$$

$$\left.4z(1-z)\right)\frac{\alpha+\beta+1}{2}\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots,\ \ \mathrm{Re}z<\frac{1}{2}.$$

3°. 积分关系式

$$F(\alpha,\beta,\gamma+1,\ \ z)=\gamma\int_0^1 t^{\gamma-1}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ tz)dt.$$

## 三、球调和函数、勒让德函数和特种球多项式

**1.称满足方程**

$$\triangle u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

的$x$，$y$，$z$的齐次多项式解为球函数．可以证明：存在$2n+1$个线性独立的齐$n$次多项式满足方程（1）．引入球坐标

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta.$$

这时齐 $n$ 次调和多项式记为

$$U_n(x, y, z)=r^n Y_n(\theta, \phi).$$

这种满足（1）的多项式称为球体函数，而$Y_n(\theta, \phi)$称为球面函数，它们是

$$p_n(\cos\theta),\ p_{n,m}(\cos\theta)\cos m\phi,\ p_{n,m}(\cos\theta)\sin m\phi,$$
$$(m=1, 2, \cdots, n) \qquad (2)$$

其中，$p_n(x)$是勒让德多项式

$$p_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \qquad (3)$$

而

$$p_{n,m}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m p_n(x)}{dx^m}$$

$$=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{n!\,2^n}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n. \qquad (4)$$

注意到，若以 $x=\cos\theta$代入$(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$得到$\sin^m\theta$，以任意常数乘（2）中的各解，即得到一般形式的 $n$ 阶球函数

$$Y_n(\theta, \phi)=a_0 p_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos m\phi+b_m\sin m\phi)$$
$$\times p_{n,m}(\cos\theta). \qquad (5)$$

从勒让德函数入手，利用分部积分，可得如下正交性

$$\iint_s Y_p(\theta, \phi)Y_q(\theta, \phi)d\sigma=0. \quad (p\neq q). \qquad (6)$$

其中 $s$ 为单位球面，$d\sigma$为球面上的面积元，$d\sigma=\sin\theta\, d\theta d\phi$.

（6）不难由下面导出．设

$$U_p=r^pY_p(\theta,\ \phi),\ U_q(\theta,\ \phi)=r^qY_q(\theta,\ \phi).$$

应用Green公式得

$$\iint_s\left(U_p\frac{\partial U_q}{\partial n}-U_q\frac{\partial U_p}{\partial n}\right)d\sigma=\iiint_v(U_p\triangle U_q$$

$$-U_q\triangle U_p)dv=0.$$

由于$dn=dr$，即得

$$\iint_s[qY_q(\theta,\ \phi)-pY_p(\theta,\ \phi)]d\sigma=0.$$

由$p\neq q$立得（6）.

同样可证，从（2）中任取两个函数，它们虽然阶数相同，但亦必相互正交。事实上，单位球面上的积分归结到关于$\phi$在区间$(0,\ 2\pi)$上的积分以及关于$\theta$的积分，但（2）中所含与$\phi$有关的因子为：

$$1,\ \cos\phi,\ \sin\phi,\ \cos2\phi,\ \sin2\phi,\ \cdots,\ \cos n\phi,\ \sin n\phi.$$

其中任意两个因子的乘积在$(0,\ 2\pi)$上积分都等于零。

而由勒让德函数在$(-1,\ 1)$上的平方积分值得到

$$\left\{\begin{aligned}&\iint_s[p_n(\cos\theta)]^2d\sigma=\frac{4\pi}{2n+1},\\&\iint_s[p_{n,m}(\cos\theta)\cos m\phi]^2d\sigma=\frac{2\pi}{2n+1}\quad\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\\&\iint_s[p_{n,m}(\cos\theta)\sin m\phi]^2d\sigma=\frac{2\pi}{2n+1}\quad\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.\end{aligned}\right.\tag{7}$$

按球函数的展开。每一在任意半径的球面上定义的函数必为

这球面上的地理坐标θ和φ的函数，因此，可以记为$f(\theta,\phi)$。假定它可以按照球函数展开，即可在球面上展成一个和Fourier级数类似的级数

$$f(\theta, \phi)=a_0^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_0^{(n)}p_n(\cos\theta)$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(a_m^{(n)}\cos m\phi+b_m^{(n)}\sin m\phi)p_{n,m}(\cos\theta)\Big\}. \qquad (8)$$

利用球函数的正交性以及公式（7）得

$$\begin{cases} a_m^{(n)}=\dfrac{2n+1}{2\sigma_m\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint_s f(\theta, \phi)p_{n,m}(\cos\theta) \\ \qquad \times\cos m\phi d\sigma, \\ b_m^{(n)}=\dfrac{2n+1}{2\sigma_m\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint_s f(\theta,\phi)p_{n,m}(\cos\theta)\text{sim}\phi d\sigma. \end{cases} \qquad (9)$$

其中，当$m=0$时，$\sigma_m=2$；当$m>0$时，$\sigma_m=1$；$p_{n,0}(x)=p_n(x)$。为证明（8）右端在一定条件下的确收敛于$f(\theta, \phi)$，尚需要球函数所满足的几个具积分形式的关系。

设$S_R$是半径为$R$的球面，$y_n(\theta, \phi)$是一个$n$阶球函数，$M$是球内一点，其球坐标为$(r, \theta, \phi)$，则$U_n(M)=r^n y_n(\theta, \phi)$是调和函数。对其应用Green公式

$$U_n(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_{SR}\left(\frac{\partial U_n}{\partial \nu}\frac{1}{d}-U_n\frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial \nu}\right)ds. \qquad (10)$$

其中$d=r_{MM'}$，$M'$为球面上动点，$ds$是球面元，$\nu$是$S_R$的外法线方向。这时$\dfrac{\partial}{\partial \nu}=\dfrac{\partial}{\partial R}$。显然$\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\gamma+r^2}}$是一调和

函数，改写为$\frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{R}\cos\gamma+\left(\frac{r}{R}\right)^2}}$，它可以按$\frac{r}{R}$的幂次展开，

且不难由勒让德函数表达式得

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2r}{R}\cos\gamma+\left(\frac{r}{R}\right)^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{R^n},$$

于是$\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\gamma+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{R^{n+1}}=\frac{1}{d}$，$r<R$.

从而

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{d}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{d}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,p_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{R^{n+r}},$$

又由

$$\frac{\partial U_n}{\partial\nu}=nR^{n-1}y_n(\theta,\ \phi).$$

其中$\gamma$是动径$OM$和$OM'$间的夹角．将这些结果代入(10)，再令$R=1$即得

$$r^ny_n(\theta,\ \phi)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_s\left\{ny_n(\theta',\ \phi')\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\cos\gamma)r^k+y_n(\theta',\ \phi')\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)p_k(\cos\gamma)r^k\right\}d\sigma.$$

其中$\theta'$，$\phi'$表示单位球面上动点$M'$的地理坐标．上式中两阶数关于$\theta'$和$\phi'$为一致收敛．这是因为$r<1$和利用

$$|p_n(\cos\theta)| \leqslant p_n(1) = 1$$

进行逐项积分即得

$$r^n y_n(\theta,\ \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{4\pi} \iint_s (k+n+1) y_n(\theta',\ \phi') p_k(\cos\gamma) d\sigma.$$

由此式立得，右边级数除了 $n = k$ 外，其余各项均为零（正交性），于是得到很重要的积分公式

$$\iint_s y_n(\theta', \phi') p_m(\cos\gamma) d\sigma = 0, \text{当} m \neq n, \qquad (11)$$

$$\iint_s y_n(\theta', \phi') p_n(\cos\gamma) d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} y_n(\theta,\ \phi). \qquad (11)'$$

将（8）中所有阶数相同的球函数都并成一项，即

$$f(\theta,\ \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\theta,\ \phi).$$

将上式中 $\theta$ 和 $\phi$ 改为 $\theta'$ 和 $\phi'$，以 $p_n$（con$\gamma$）乘等式两边，然后关于 $\theta'$，$\phi'$ 积分，利用(11)，(11)′即得

$$y_n(\theta,\ \phi) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_s f(\theta', \phi') p_n(\cos\gamma) d\sigma. \qquad (12)$$

这公式决定了(8)中所有阶数相同的球函数的和的数值.

关于 $p_n(\cos\theta)$ 还成立如下求和公式

$$\frac{1-r^2}{(r^2 - 2r\cos\theta + 1)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) p_n(\cos\theta) r^n. \qquad (13)$$

**2.勒让德函数**

称满足

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0$$

的解为勒让德函数，记为

$$p_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_c\frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}dt. \tag{14}$$

在$p_n(x)$的生成函数

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)t^n, \tag{15}$$

两边对$t$求微分，得到

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}np_n(x)t^{n-1}.$$

以$(1-2xt+t^2)$乘以两边，左边利用方程，比较两边$t^n$的系数，得到

$$\begin{cases}p_1(x)-xp_0(x)=0,\\(n+1)p_{n+1}(x)-(2n+1)xp_n(x)+np_{n-1}(x)=0,\\(n\geqslant 1).\end{cases} \tag{16}$$

若在（15）两边对$x$求微商，可得

$$p_n(x)=p'_{n+1}(x)-2xp_n'(x)+p'_{n-1}(x). \tag{17}$$

对（16）求微商，用（17）消去$p'_{n-1}(x)$得

$$p'_{n+1}(x)=xp'_n(x)+(n+1)p_n(x). \tag{18}$$

从（17），（18）中消去$p'_{n+1}(x)$得

$$xp_n'(x)-p'_{n-1}(x)=np_n(x). \tag{19}$$

又从（18），（19）中消去$p_n'(x)$，得到

$$p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)=(2n+1)p_n(x). \tag{20}$$

把（18）中的 $n$ 换成 $n-1$，然后用（19）式消去 $p'_{n-1}(x)$，得到

$$(x^2-1)p'_n(x)=nxp_n(x)-np_{n-1}(x).$$

此外，还成立下面的加法公式.

$$p_l(\cos\gamma)=\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m p_l^m(\cos\theta)\,p_l^{-m}(\cos\theta')e^{im(\phi-\phi')}$$

$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}p_l^m(\cos\theta)\,p_l^m(\cos\theta')\,e^{im(\phi-\phi')}$$

$$=p_l(\cos\theta)p_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}p_l^m(\cos\theta)p_l^m$$

$$(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi'). \tag{21}$$

其中 $\theta$，$\theta'$；$\phi$，$\phi'$ 同 3 中定义. $p_l^m(x)$ 为连带勒让德函数

$$p_l^m(x)=(-1)^m\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l=p_{l,m}(x).$$

$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$ 为 $OM$ 和 $OM'$ 间夹角的余弦.

### 3. 特种球多项式 $C_n^\lambda(x)$

$C_n^\lambda(x)$ 由下式给出

$$(1-2tx+t^2)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\lambda}(x)t^n. \tag{22}$$

$C_n^\lambda x$称为特种球多项式，又称盖根保尔 (Gegenbouer) 多项式.左边称为生成函数. 定义$C_0^\lambda(x)=1$.

勒让德多项式是特种球多项式的一种特殊情形：

$$p_n(x)=C_n^{\frac{1}{2}}(x). \tag{23}$$

关于$C_n^\lambda(x)$有如下递推关系

$$(n+1)C_{n+1}^\lambda-2(\lambda+n)xC_n^\lambda+(2\lambda+n-1)C_{n-1}^\lambda=0, \tag{24}$$

$$\frac{dC_{n+1}^\lambda}{dx}-2x\frac{dC_n^\lambda}{dx}-2\lambda C_n^\lambda+\frac{dC_{n-1}^\lambda}{dx}=0, \tag{25}$$

$$x\frac{dC_n^\lambda}{dx}-\frac{dC_{n-1}^\lambda}{dx}=nC_n^\lambda, \tag{26}$$

$$(1-x^2)\frac{dC_n^\lambda}{dx}+nxC_n^\lambda-(2\lambda+n-1)C_{n-1}^\lambda=0. \tag{27}$$

$C_n^\lambda(x)$可以化为超几何函数，这就是

$$C_n^\lambda(x)=\frac{(2\lambda)_n}{n!}F\left(-n,\ 2\lambda+n,\ \frac{1}{2}+\lambda,\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{28}$$

$C_n^\lambda(x)$带权正交，即

$$\int_{-1}^{1}C_n^\lambda(x)C_m^\lambda(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{\pi\Gamma(2\lambda+n)}{2^{2\lambda-1}n!(\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^2}\sigma_{nm}. \tag{29}$$

其中

$$\sigma_{nm}=\begin{cases}1 & n=m,\\ 0 & n\neq m.\end{cases}$$

对一般的λ值，从（28）出发，利用超几何函数公式可得

$$C_n^{\lambda}(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^l\Gamma(\lambda+n-1)}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}. \tag{30}$$

当$x=\cos\theta$时，$C_n^{\lambda}(\cos\theta)$类似成立带权正交，构成正交完备系，故$f(\theta)$可以按$C_n^{\lambda}(\cos\theta)$展成级数

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nC_n^{\beta}(\cos\theta).$$

其中，$f(\theta)$是$\theta$的连续函数，以$2\pi$为周期。而

$$a_n=\alpha_n^{\lambda}\int_0^{\pi}f(\theta)C_n^{\lambda}(\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta d\theta. \tag{31}$$

$\alpha_n^{\lambda}=\int_{-1}^{1}[C_n^{\lambda}(x)]^2(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx$是常数（见（29）式）。

关于$C_n^{\lambda}(x)$成立如下加法公式

$$C_n^{\lambda}(zz_1-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}(z_1^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi)$$

$$=\frac{\Gamma(2\lambda-1)}{[\Gamma(\lambda)]^2}\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\frac{4^l\Gamma(n-l+1)[\Gamma(\lambda+l)]^2(2\lambda+2l-1)}{\Gamma(2\lambda+n+l)}$$

$$\times(z^2-1)^{\frac{l}{2}}(z_1^2-1)^{\frac{l}{2}}\cdot C_{n-l}^{\lambda+l}(z)\,C_{n-l}^{\lambda+l}(z_1)\,C_l^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\phi). \tag{32}$$

利用此式和

$$\int_0^{\pi} C_n^{\lambda}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2\lambda}d\theta=\begin{cases}0, & n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\\ \dfrac{\pi\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda}[\Gamma(\lambda+1)]^2}, & n=0.\end{cases}$$

可得如下公式

$$\int_0^{\pi} C_n^{\lambda}(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\phi)(\sin\phi)^{2\lambda-1}d\phi$$

$$=\frac{2^{2\lambda-1}n!\,[\Gamma(\lambda)]^2}{\Gamma(2\lambda+n)}C_n^{\lambda}(\cos\theta)\,C_n^{\lambda}(\cos\theta'),\quad(\mathrm{Re}\lambda>0). \tag{33}$$

# 参考文献


〔1〕 L. Euler, Institutions Calculi Integralis, I. Petropoli, 1790.

〔2〕 S. D. Poisson, Memoire Sur Lintegration des Equations Lineaires Aux Derivees Partielles, Journal de Lecole Polytechnique, 12 (1823), 19.

〔3〕 G. Darboux, Legons Sur La Theorie Generale des Surfaces, T. II Paris (1914—1915)

〔4〕 G. F. B. Riemann. Uber Die Fortpflanzung Ebener Luftwellen Vonendicher Schwingunqsweite. Abhandl. Königl. Gess. Göttingen, 8 (1860).

〔5〕 V. Volterra, Sulle Vibrazioni Luminose Nei Mezzi Isotropi. Rend. Accad. Nazl. Lincel, 1 (1892) 161—170.

〔6〕 E. Beltrami, Sulle Teoria Delle Funzioni Potenziali Simmetrche. Mem Accad. Sci. Ist. Bologna (4) 2 (1880), 461—505.

〔7〕 I. N. Sneddon. Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. North Holland, New York, 1966.

〔8〕 K. B. Ranger, Some Integral Transformation Formulae for The Strokes-Beltrami Equations, J.

Math, 12 (1963), 663—673.

〔9〕 K. B. Ranger, On the Construction of Some Integral Operators of Generalized Axially Symmetric Harmonics and Stream Functions, J. Math Mech., 14 (1965), 383—401.

〔10〕 K. B. Ranger, On The Representation of Axially Symmetric Potentials as Mean Values, J. Math. Mech. 14 (1965), 769—778.

〔11〕 K. B. Ranger, Note on Some Integral Transformations for Generalized Axially Symmetric Potentials, J. Math. Mech, 16 (1967), 1377—1380.

〔12〕 M. H. Martin, Riemann's Method and The Problem of Cauchy, Bull. Amer, Math. Soc., 57 (1951), 238—249.

〔13〕 J. B. Diaz & M. H. Martin, Riemanns Methed and The Problem of Cauchy Ⅰ. The Wave Equation in *n* Dimensions. Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 476—483.

〔14〕 M. H. Protter, The Characteristic Initial Value Problem for The Wave Equation and Riemann's Method. Amer. Math. Monthly, 61 (1954), 702—705.

〔15〕 F. Tricomi, 论二阶混合型线性偏微分方程, 科学出版社, 北京, 1957.

〔16〕 M. M. Смирнов, Уравнения смешанного типа, Наука, Москва, 1970.

〔17〕 P. Germain, R. Bader, Sur Quelques Problems

Relatifs a Lequation du Type Mixte de Tricomi. Publ. ONERA, 1952, No. 56.

〔18〕 М. М. Смирнов, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, Наука, Москва, 1966.

〔19〕 J. A. Donaldson, An Operator Calculus for a Class of Abstract Operator Equations, J. Math. Anal. Appl. 37 (1972), 167—184.

〔20〕 L. R. Bragg. Fundamental Selutionsand Propreties of Solutions of The Initial Value Radial Euler-Poisson-Darboux Problem, J. Math. Mech., 18 (1969), 607—616.

〔21〕 L. R. Bragg Hypergometric Operator Series and Related partial Differential Equations, Trans Amer. Math. Soc., 143 (1969), 319—336.

〔22〕 L. R. Bragg, The Riemann-Liouville Integral and Parameter Shifting in a Class of Linear Abstract Cauchy Problems, SIMA. J. on Math. Anal., 7 (1976), 1—12.

〔23〕 W. Miller. Jri, Lie Theory and Special Functions. Math. in Sci. and Engineering. Vol. 43, Academic. Press (1968), New York.

〔24〕 R. Carroll, Singular and Degenerate. Cauchy Problem. Academic Press, New York. Son Foncisco London 1976.

〔25〕 F. Treves, Discrete Phenomena in Uniqueness in the Cauchy Problem, Proc. Amer. Math. Soc.,

46 (1974), 2 :229--233.

〔26〕 王光寅，麦明澂，陆柱家，初始问题的离散现象，科学通报，23 (1978) ，5：279—282.

〔27〕 邱佩璋，凌岭，Euler-Poisson-Darboux 方程的第三问题的极值原理，科学记录，1957，341—342.

〔28〕 F. G. Fridlander & A. E. Heins, On the Representation Theorems of Poisson Riemann and Volterra For The Euler-Poisson-Darboux Equation, Asch. Rat. Mech, Anal., 133 (1969), 219—230.

〔29〕 A. Erdelyi, On The Euler-Poisson-Darboux Equation, J. D'Analyse Math. 23 (1970), 89—102.

〔30〕 A. Weinstein, The Generatlized Radiation Problem and The EPD Equation Summa Brasiliensis Math., 3 (1955), 125—147.

〔31〕 J. Lions, On the Generalized Radiation Problem of Weinstein, J. Math. Mech., 18 (1959), 873—888.

〔32〕 Le Roux, Sur Les Integrates Des Equations Lineaires Aux Derive's Partilles Du Second Order a Deux Variables Independentes. Annales de I'Ecde Normale Superieure, 12 (1895), 227—316.

〔33〕 F. G. Friedlander & A. E. Heins, On a Singular Boundary Value Problem for the Euler-Darboux Equation, J. Differential Equations, 4(1968), 460—491.

〔34〕 S. Gellerstedt. Sur Un Problem Au Limites Pour

Une Equation Lineaire aux Derive'es Partiells Du Second Order De Tipe Mixte. These Uppsla 1935.
[35] T. B. Diag & E. Young, On the Characteristic Initial Value Problem for the Wave Equation in Odd Spatial Dimensions with Radid Initial Data. Ann. Math. Pureed. Appl., 94 (1972), 161—176.
[36] J. B. Diaz & E. Young, A Singular Characteristic Boundary Value Problem for the Euler-Poisson-Darboux Equation. Ann. Math. Pureed Appl., 95 (1973), 131—145.
[37] B. A. Fusaro, A solution of Singular Mixed Problem for the Equation of Euler-Poisson-Darboux. Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 610—613.
[38] E. Young, A Mixed Problem for the Euler-Poisson-darboux Equation in Two Space Variables, SIAM. J. Math. Anal., 6 (1975), 17—24.
[39] M. B. Капилевич, Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа, Матем., сб. 30 (1952), 11—38.
[40] М. Б. Капилевич, О конфлюэнтных гипергеометрических функциях горна Дифф. уравнения, I (1966), 1239—1254.
[41] М. Б. Капилевич, О функция Грина-Аэамара ддя сингулярных задач Трикоми, Rev. Roum. Math. Pures et Appl, XI (1966), 317—324.
[42] E. T. Copson & A. Erdelyi, On a Partial Dif-

ferential with Two Singular Lines Arch. Rat. Mech. Anal., 2 (1959), 76—86.

[43] E. T. Copson. On a Singular Boundary Value Problem for an Equation of Hyperbolic. Arch. Rat. Mech. Anal., 1 (1958), 349—356.

[44] T. W. Chaundy, Linear Partial Differential Equations (I) Quart. J. Math. (Oxford) 9 (1938), 234—240.

[45] E. T. Copson, On the Riemann-Green Function, Arch. Rat. Math. Anal. I (1958), 324—348.

[46] A Weinstein, Sransonic Flow and Generalized Axially Symmetric Potenial Theory. Proc. Nol. Aerobaistic Res. Symp. Naval Ordnance Labaratary. White Oak. Marland, 1949.

[47] A. Weinstein, Generalized Axially Symmetric Potenial Theory. Bull. Amer. Math. Soc., 59 (1953), 20—38.

[48] A. Weinstein, Singular Differential Equation and Their Applications. Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Gordon & Breach, New York, 1962, 29—49.

[49] E. Holmgren, Sur un Problem aux Limates Pour Lequation Arkiv. Mat. Astr Och Fysilk, 19B (1926).

[50] Ф.И.Франклъ, К теории чравения $yz_{xx}+z_{yy}=0$ Изв. АН СССР. Серия Матем, 10 (1946), 135—166.

[51] И.Л.Каролъ, К теории краевых задач ддя урав-

нения смешанного эллиптико-гиперболического типа, Матем, сб. 38 (80) (1956), 261—282.
[52] М. М. Смирнов, Об одной краевой затаче для эллиптическкго уравнения вырождающегося на части границы области, Вестник Ленингр Ун-Та, 3 (1960), 73—78.
[53] A Weinstein, Discontinuous Integrals and Generalized Potential Theory Trans. Amer. Math. Soc., 63 (1948), 342—354.
[54] J. B. Diaz & A. Weinstein, On the Fundamental Solutions of Singular Beltrami Operator. Studies in Math. Mech Presented to Richard Von. Mises. New York, 1954, 97—102.
[55] P. Henrici, Zur Funktionen der Wellengileichung. Comm. Math. Helv., 27 (1953), 235—293.
[56] P. Henrici, On the Domain of Requarity of Generalized Axially Symmetric Potentials, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 29—31.
[57] P. Henrici, A Survey of I. N. Vekua's Theory of Elliptial. ZAMP., 8 (1957), 169—202.
[58] P. Henrici, Complete Systems of Solutions for a Class of Singular Elliptic Partial Differential Equation, In Boundary Value Problemsin Differential Equations, Univ of Wit, Press, Madison, 1960, 19—34.
[59] R. P. Gilbert, Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations Academic Press,

New York, 1969.

〔60〕 R. P. Gilbert, Constructive Methods for Elliptic Equations, Lecture Notes in Math, 365 (1974). Springer-Verlag Berlin, Heidelbery New York.

〔61〕 R. P. Gilbert & R. J. Weinacht, Function Theoretic Methods in Differential Equations, Research Notes in Mathematics, London San Francisco-Melbourne, 8 (1976).

〔62〕 A. Weinstein, Sur un Probleme De Cauchy Avec Des Donnees Sousharmoniques, C. R. Paris, 243 (1956), 1193.

〔63〕 A. Weinstein, On a Singular Differential Operator, Annali Di Mat, 49 (1960), 359—365.

〔64〕 J. L, Lions, Operateurs De Delsarte Et Problemes Mixtes, Bull, Soc, Math. France, 84 (1956), 9—95.

〔65〕 J. L. Lions, Equations Differentielles, Operationnelles Et Problems Aux Limites, Springer-Verlag, 1961.

〔66〕 J. L. Lions, Equations D' Euler-Poisson-Darboux Generalisee Comptes Rendus Acad, Sc., 246 (1958), Paris 208—210.

〔67〕 A. Erdelyi, An Application of Fractional Integrals, J. D' Analyse Math, 14 (1065), 113—126.

〔68〕 M. Б. Катилевич, О Формчлах связи ддя сингулярных Залач Крикоми, ДАН СССР, 132 (1960), 28—30.

〔69〕 D. Colton, Cauchy's Problem for a Singular Parabolic Partial Differential Equation, J. Diff Equations, 8 (1970), 250—257.

〔70〕 J. B. Diaz & Ludford, On the Singular Cauchy Problem for a Generalization of the Euler-Poisson-Darboux Equation in Two Space Variables, Ann Mat. Ser Ⅳ. 38 (1955), 33—50.

〔71〕 E. T. Copson, On a Regular Cauchy Problem for the Euler-Poisson-Darboux Equation, Proc. Royal Society (London), A 235 (1955), 560—572.

〔72〕 E. C. Young, A Solution of the Singular Cauchy Problem for the Nonhomegeneous Euler-Poisson-Darboux Equation, J. Diff. Eqs., 3 (1967), 522—545.

〔73〕 E. C. Young, On a Generalized Euler-Poisson-Darboux Equation, J. Math. Mech., 18 (1969), 1167—1175.

〔74〕 J. Burlak, A Pair of Dual Integral Equations Occurring in Diffraction Theory, Proc, Edinburgh Math. Soc. (2) 13 (1962), 179—188.

〔75〕 R. P. Srivastar, On Certain Integral Equations of Convolution Type with Bessel-Function Kernels, 15 (1966), 111—116.

〔76〕 J. S. Lowndes, A Generalization of the Erdelyi-Kober Operators, 17 (1970), 139—148.

〔77〕 Toali, A New Class of Integral Transforms, Proc. Amer, Math Soc, 11 (1960), 290—298.

〔78〕 K. N. Srivastave, A Class of Integral Equations Involving Ultraspherical Polynomials as Kernel 同上, 14 (1963), 932—940.
〔79〕 A. Erdelyi, An Integral Equation Involving Legendre Functions, J. Soc Indust. Appl. Math., 12 (1964), 15—30.
〔80〕 K. N. Srivastava, Fractional Integration and Integral Equation with Polynomials Kernels, J. London Math. Soc, 40 (1965), 435—440.
〔81〕 K. N. Srivastava, A Class of Integral Equations Involving Laguerre Polynomials as Kernel. Proc, Edinburgh Math. Soc., (2) 13 (1962), 179—185.
〔82〕 E. R. Love, Some Integral Equations Involving Hypergeometric Functions. 15 (1966), 169—198.
〔83〕 E. K. Blum, The Euler-Poisson-Darboux Equation in the Exceptional Cases Proc. Amer. Math Soc., T5 (1954).
〔84〕 L. Asgeirsson, Ueber eine Mittdwertseigenschaft Von Losungen Homogener Linearer Partieller Differentialgleichungen, Math Ann, T113 (1937).
〔85〕 F. Bureau, Divergent Integrals and Partial Differential Equations Comm. Pure Appl Math, T8 (1955).
〔86〕 J. Delsarte, Sur Certains Transformations Fonetionnelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Order, C. R. Acad. Sc, 1, 206 (1938).

〔87〕 J. B. Diaz Et G. S. S. Ludford, On the Singular Problem, Ann Mat. Pura Appl 1.38 (1955).
〔88〕 J. B. Diaz Et H. F. Weinberger, A Solution of the Singular Initial Value Problem for the Euler-Poisson-Darboux Equation, Proc. Amer. Math Soc., T4 (1953).
〔89〕 J. Hadamard, Le Problem De Cauchy Paris Hermann, 1932.
〔90〕 Tkato, Integration of the Equation of Evolution in a Banach Spach J. Math, Soc, Japan, T5 (1953).
〔91〕 P. D. Lax Et A. N. Milgram, Parabolic Equations, Contribution to the Theory of Partial Differential Equations, Ann Math Studies, n 33 (1954).
〔92〕 Levitan, D'eveloppments De Functions en Series en Integrales de Fourier-Bessel, Uspechi Mat Naux t6, (1951).
〔93〕 J. L. Lions, Problems Aux Limites en Theorie Des Distributions, These, Paris 1954, Acta Math T94 (1955).
〔94〕 V. Volk, Sur Les Formules De Transformation Pour Les Equations Differentielles Avec Une Singularite en x=0. Uspechi Mat Nauk T8 1953 (56).
〔95〕 M. Riesz, Integrale de Riemann-Lionville et Probleme de Cauchy Acta Math T81 (1949).
〔96〕 A. Weinstein, The Singular Solutions and the

Cauchy Problem for Generalized Tricomi Equations, Comm Poure Appl Math T7 (1954).

〔97〕 A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1964).

〔98〕 D. Widder, Analytic Solutions of the Heat Equation, Duke Math, J, 20 (1962).

〔99〕 A. Erdelyi, On Fractional Integration and its Application to the Theory of Hankel Transforms, Quart J. of Math (Oxford), 11 (1940).

〔100〕 O. Arena, On a Degenerate Elliptic-Parabolic Equation, Comm, P. D. E, 1978, 3:11.

〔101〕 O. Arean, On a Singular Parabolic Equation Related to Axially Symmetric Heat Potentials, Ann Math Pured Appl (4) 105 (1975), 337—343.

〔102〕 С. А. Терсенов, Об одной краевой задаче для вырождающегося параболического уравнения, ДАН СССР, T208 (1973), 6:1300—1302.

〔103〕 С. А. Терсенов, О первой краевой задаче для вырождающегося параболического уравнения, ДАН СССР, T221 (1975), 6 : 1292—1295.

〔104〕 M. Gevery, Sur Les Equations Aux Derives Partielles du Type Parabolique, J. de. Math., (6) 10 (1913), 105—148.

〔105〕 C. D. Pagani, On the Parabolic Equation Sgn (x) (x)P Uy − Uxx = 0 and Related One. Ann Mat. Pureed Appl, 99 (1974), 333—299.

〔106〕 A. Erdelyi, Some Applications of Fractional Integration Mathematical Note No 316 Boeing Scientific Research Loboratories, 1963.

〔107〕 H. Kober On Fractional I tegrals and Derivatives, Quart. J. of Math. (Oxford), 11 (1940), 193—211.

〔108〕 Хоанг Динь зунг, Некоторые Интералъных прелстовления $x^k y^l$-Аналитических Функций и формулы их обращения, Дифф уравнения, T17 (1981), 1 : 163—171.

〔109〕 M. C. Салахитдинов, M.Мирсабуров, O некоторых краевых затачах для гипербодического уравнения выражтающегося внутри обрасти, Дифф уравнения T17 (1981), 1 : 129—136.

〔110〕 C. A. Алдашев, Об одной задаче Дарбу для уравнения Зйлера-Дарбу-Пуассона, Дифф уравнения T16 (1980), 6 : 161—163.

〔111〕 C. A. Алдащев, Об одной свойстве решений сингулярнои задачи Коши для уравнения Зилера-Дарбу-Пуассона, Дифф уравнения, T11 (1975), 1 : 2—7.

〔112〕 索伯列夫，数学物理方程，高等教育出版社，1958.

〔113〕 盖尔芳特，希洛夫，广义函数1卷，科学出版社，1965.

〔114〕 И. A. Киприянов, Ляхов, Л. H., Об одном классе псевдодифференциалъных операторов, ДОКЛ AH CCCP, T218 1974, 2.

〔115〕 B.B.Катрахов, Спектралъная функция некото-

рых сингулярных дифференциальных оператров I, Дифф уравнения T12 (1976), 7:1256—1276.
〔116〕 Л. Н., Ляхов, О компактности и псевдолокальности сингулярных псевдодифференциальных операторов, Дифф уравнения T19 (1983), 6.
〔117〕 杨光俊，奇型偏微分方程，云南大学学报，1979，1.
〔118〕 杨光俊，一个含多条奇线的双曲型方程，云南大学学报，1984，4：1—16.
〔119〕 李友宝，奇性抛物方程的基本解及两类定解问题，云南大学学报，8（1986），2：134—140.
〔120〕 华罗庚，从单位圆谈起，科学出版社，北京，1975.
〔121〕 殷慰萍，一类双曲型方程Cauchy 问题显式解，数学学报，23（1980），1：102—117.
〔122〕 王竹溪，郭敦仁，特殊函数概论，科学出版社，北京，1965.
〔123〕 吴新谋，数学物理方程，第三册，科学出版社，北京，1958.
〔124〕 戴正德，积分算子与一类广义超几何偏微分方程，云南大学学报，1982，1.
〔125〕 唐振兴，椭圆型EPD方程其本解及其在奇性定解问题上的应用，云南大学学报，1982，1.
〔126〕 宋惠元，EPD方程的Hadamaxd 函数及其在奇性边值问题上的应用，数学物理学报，5（1985），4，387—401.
〔127〕 张灏文，论奇性古沙问题，昆明工学院学报，1979，3：1—24.
〔128〕 邱佩璋，陈立诚，栾文贵，关于始值问题离散现象的

一个注记，数学学报，24（1981），5：731—753.
〔129〕王传芳，Euler-Poisson-Darboux方程的混合问题，杭州大学1979年校庆论文集.
〔130〕李好好，Euler-Poisson-Darboux方程奇性Picard问题存在性和唯一性中的离散现象，山东海洋学院学报，12：2（1982），9—22.
〔131〕宋惠元，李好好，关于一类非主型方程Goursat问题的求解，山东海洋学院学报，14：4（1984），94—100.